V. Tableaux

1 Tableaux à une dimension

Définition 1. *Un* tableau informatique *associe à un nom une suite d'éléments accessibles par leur indice, on peut lui appliquer la fonction* longueur *qui permet d'obtenir la longueur du tableau.*

Remarque 1. *À la différence d'une liste, la taille d'un tableau est immuable et définie lors de sa déclaration.*

Remarque 2. *Nous utiliserons les conventions suivantes :*
- *on représente un tableau par un tableau horizontal.*
- *les éléments d'un tableau t sont notés $t_0, t_1, \dots, t_{\text{longueur}(t)-1}$*

Exemple 1. *Création d'un tableau de zéros de taille n.*

Fonction*: zeros(n)*
Action*: Construction d'un tableau de zéros de taille n*
Début
  t **: tableau de taille** n
  Pour k **allant de** 0 **à** $n-1$ **faire**
    $t_k \leftarrow 0$
  FinPour
  Renvoyer t
Fin

	valeur de t				
Début				$\dots$	
$k=0$	0			$\dots$	
$k=1$	0	0		$\dots$	
$k=2$	0	0	0	$\dots$	
$\vdots$			$\vdots$		
$k=n-1$	0	0	0	$\dots$	0
Fin	0	0	0	$\dots$	0

Exercice 1. *Écrire une fonction permettant de construire le tableau des entiers de 1 à n.*

Exemple 2. *Conversion d'un tableau en liste.*

Fonction*: liste(t)*
Action*: Conversion du tableau t en une liste l*
Début
  $l \leftarrow [\ ]$
  Pour k **allant de** 0 **à** $\text{longueur}(t)-1$ **faire**
    Ajout de t_k **à la liste** l
  FinPour
  Renvoyer l
Fin

Exercice 2. *Écrire une fonction permettant de convertir une liste en tableau.*

Exercice 3. *Écrire une fonction permettant de tester la présence d'une valeur dans un tableau.*

Exemple 3. *Concaténation de tableaux.*

> **Fonction**: *concatenation*(a, b)
> **Action**: *Concaténation des tableaux* a *et* b
> **Début**
> t **: tableau de taille** longueur(a) + longueur(b)
>   **Pour** k **allant de** 0 **à** longueur$(a) - 1$ **faire**
> $t_k \leftarrow a_k$
>   **FinPour**
>   **Pour** k **allant de** 0 **à** longueur$(b) - 1$ **faire**
> $t_{\text{longueur}(a)+k} \leftarrow b_k$
>   **FinPour**
>   **Renvoyer** t
> **Fin**

Exercice 4. *Écrire une fonction permettant de construire le tableau des éléments d'indices pairs d'un tableau donné puis construire une fonction permettant de construire le tableau des éléments d'indices impairs d'un tableau donné.*

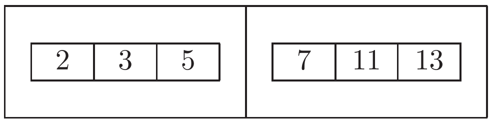
2 Tableaux à deux dimensions

Définition 2. *On appelle* tableau à deux dimensions *de taille* n, p *un tableau de taille* n *de tableaux de taille* p.

Remarque 3. *Pour un tableau* t *à deux dimensions, on notera* t_{ij} *l'élément d'indice* j *du tableau* t_i.

Remarque 4. *Un tableau de nombres de taille* n, p *permet de représenter une matrice à* n *lignes et* p *colonnes.*

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 7 & 11 & 13 \end{pmatrix}$$



Exemple 4. *Création d'un tableau de zéros de taille* n, p.

> **Fonction**: *zeros*(n, p)
> **Action**: *Construction d'un tableau de zéros de taille* n, p
> **Début**
> t **: tableau de taille** n, p
>   **Pour** k **allant de** 0 **à** $n - 1$ **faire**
>   **Pour** l **allant de** 0 **à** $p - 1$ **faire**
> $t_{kl} \leftarrow 0$
>   **FinPour**
>   **FinPour**
>   **Renvoyer** t
> **Fin**

Exercice 5. *Écrire une fonction permettant de générer le tableau des neuf premiers multiples des entiers de* 1 *à* 9.

Exercice 6. *Écrire une fonction permettant de calculer la somme des valeurs d'un tableau de nombres à deux dimensions.*

3 Recherche par dichotomie dans un tableau trié

Exemple 5. *Indice de la première occurrence d'une valeur dans un tableau.*

> **Fonction**: *PremierIndice(v, t)*
> **Action**: *Détermination de la première occurrence d'une valeur v dans un tableau t*
> **Début**
> | **Pour** k **allant de** 0 **à** longueur$(t)-1$ **faire**
> | | **Si** $t_k = v$ **alors**
> | | | **Renvoyer** k
> | | **FinSi**
> | **FinPour**
> | **Renvoyer** -1
> **Fin**

Exercice 7. *Décrire au moyen d'un tableau indiquant l'évolution des valeurs des variables le fonctionnement de l'algorithme précédent pour la valeur* 6 *et le tableau*

1	1	2	3	3	6	6	6	7	9

.

Exemple 6. *Indice d'occurrence d'une valeur dans un tableau de nombres trié en ordre croissant*

> **Fonction**: *Indice(v, t)*
> **Action**: *Détermination d'un indice d'occurrence d'une valeur v dans un tableau de nombres t trié en ordre croissant*
> **Début**
> | $a \leftarrow 0$
> | $b \leftarrow \text{longueur}(t) - 1$
> | **TantQue** $a \leqslant b$ **faire**
> | | $c \leftarrow \lfloor \frac{a+b}{2} \rfloor$
> | | **Si** $t_c = v$ **alors**
> | | | **Renvoyer** c
> | | **sinon**
> | | | **Si** $t_c < v$ **alors**
> | | | | $a \leftarrow c+1$
> | | | **sinon**
> | | | | $b \leftarrow c-1$
> | | | **FinSi**
> | | **FinSi**
> | **FinTantQue**
> | **Renvoyer** -1
> **Fin**

Exercice 8. *Décrire au moyen d'un tableau indiquant l'évolution des valeurs des variables le fonctionnement de l'algorithme précédent pour la valeur* 6 *et le tableau*

1	1	2	3	3	6	6	6	7	9

.

Exercice 9. *Montrer que la fonction* Indice *ne fonctionne plus si on remplace l'instruction* $a \leftarrow c+1$ *par l'instruction* $a \leftarrow c$. *(on pourra considérer un tableau de longueur* 2*)*

Exercice 10. *Montrer que la fonction* Indice *ne fonctionne plus si on remplace l'instruction* $b \leftarrow c-1$ *par l'instruction* $b \leftarrow c$. *(on pourra considérer un tableau de longueur* 1*)*

Exercices supplémentaires

Exercice 11. *Créer une bibliothèque permettant le calcul vectoriel dans $\mathbb{R}^n$: produit d'un vecteur par un scalaire, somme de deux vecteurs, produit scalaire de deux vecteurs et norme d'un vecteur. (on représente un vecteur de $\mathbb{R}^n$ par le tableau de ses coordonnées)*

Exercice 12. *Écrire une fonction permettant de calculer la valeur d'un polynôme en un point donné. (on représente un polynôme par le tableau de ses coefficients)*

Exercice 13. *Écrire une fonction permettant de calculer le produit de deux polynômes. (on représente un polynôme par le tableau de ses coefficients)*

Exercice 14. *Écrire une fonction permettant de construire le tableau des colonnes d'une matrice. (on représente une matrice par le tableau de ses lignes)*

Exercice 15. *Écrire une fonction permettant de construire le tableau des sommes de chacune des lignes d'une matrice. (on représente une matrice par le tableau de ses lignes)*

Exercice 16. *Écrire une fonction permettant de construire le tableau des sommes de chacune des colonnes d'une matrice. (on représente une matrice par le tableau de ses lignes)*

Exercice 17. *Écrire une fonction permettant, en mettant ses éléments bout à bout, de convertir un tableau à deux dimensions en un tableau à une dimension.*

Exercice 18. *Écrire une fonction permettant de construire le tableau associé à la matrice* $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & \dots & \\ 3 & 5 & & & \\ 6 & & & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ & & & & n^2 \end{pmatrix}$.

(on représente une matrice par le tableau de ses lignes)

Réponses

1)

Fonction: entiers(n)
Action: Construction du tableau des entiers de 1 à n
Début
  t **: tableau de taille** n
  Pour k **allant de** 0 **à** $n-1$ **faire**
    $t_k \leftarrow k+1$
  FinPour
  Renvoyer t
Fin

2)

Fonction: tableau(l)
Action: Conversion de la liste l en un tableau t
Début
  t **: tableau de taille** longueur(l)
  Pour k **allant de** 0 **à** longueur(l) -1 **faire**
    $t_k \leftarrow l_k$
  FinPour
  Renvoyer t
Fin

3)

Fonction: appartenance(v, t)
Action: Test de l'appartenance de la valeur v au tableau t
Début
  $B \leftarrow$ Faux
  $k \leftarrow 0$
  TantQue *NON(B) ET* $k <$ longueur(t) **faire**
    Si $t_k = v$ **alors**
      $B \leftarrow$ Vrai
    sinon
      $k \leftarrow k+1$
    FinSi
  FinTantQue
  Renvoyer B
Fin

4)

Fonction: pair(T)
Action: Construction du tableau t des éléments d'indices pairs du tableau T
Début
  t **: tableau de taille** $\lfloor \frac{\text{longueur}(T)+1}{2} \rfloor$
  Pour k **allant de** 0 **à** longueur(t) -1 **faire**
    $t_k \leftarrow T_{2k}$
  FinPour
  Renvoyer t
Fin

Fonction: impair(T)
Action: Construction du tableau t des éléments d'indices impairs du tableau T
Début
  t **: tableau de taille** $\lfloor \frac{\text{longueur}(T)}{2} \rfloor$
  Pour k **allant de** 0 **à** longueur(t) -1 **faire**
    $t_k \leftarrow T_{2k+1}$
  FinPour
  Renvoyer t
Fin

5)

Fonction: tables()
Action: Construction du tableau des neuf premiers multiples des entiers de 1 à 9
Début
  t **: tableau de taille** $9, 9$
  Pour k **allant de** 0 **à** 8 **faire**
    Pour l **allant de** 0 **à** 8 **faire**
      $t_{kl} \leftarrow (k+1)(l+1)$
    FinPour
  FinPour
  Renvoyer t
Fin

6)

Fonction: somme(t)
Action: Calcul de la somme des valeurs du tableau à deux dimensions t
Début
  $s \leftarrow 0$
  Pour k **allant de** 0 **à** longueur(t) -1 **faire**
    Pour l **allant de** 0 **à** longueur(t_k) -1 **faire**
      $s \leftarrow s + t_{kl}$
    FinPour
  FinPour
  Renvoyer s
Fin

7)

valeur de k	$t_k = 6$
0	Faux
1	Faux
2	Faux
3	Faux
4	Faux
$\boxed{5}$	Vrai

8)

$t_c = 6$	$t_c < 6$	valeur de a	valeur de b	valeur de c
		0	9	4
Faux	Vrai	5	9	$\boxed{7}$
Vrai				

9) Pour un tableau t de longueur 2 avec $t_0 < v$, on obtient une boucle infinie car a, b et c demeurent égaux à 0, 1 et 0.

10) Pour un tableau t de longueur 1 avec $t_0 > v$, on obtient une boucle infinie car a, b et c demeurent égaux à 0, 0 et 0.

11)

Fonction: produit(u, λ)
Action: Calcul du produit du vecteur u par le scalaire λ
Début
  t **: tableau de taille** longueur(u)
  Pour k **allant de** 0 **à** longueur(t) -1 **faire**
    $t_k = \lambda u_k$
  FinPour
  Renvoyer t
Fin

Fonction: somme(u, v)
Action: Calcul de la somme des vecteurs u et v
Début
  t **: tableau de taille** longueur(u)
  Pour k **allant de** 0 **à** longueur(t) -1 **faire**
    $t_k = u_k + v_k$
  FinPour
  Renvoyer t
Fin

Fonction: ps(u, v)
Action: Calcul du produit scalaire des vecteurs u et v
Début
  $s \leftarrow 0$
  Pour k **allant de** 0 **à** longueur(u) -1 **faire**
    $s \leftarrow s + u_k v_k$
  FinPour
  Renvoyer s
Fin

Fonction: norme(u)
Action: Calcul de la norme du vecteur u
Début
  Renvoyer $\sqrt{\mathrm{ps}(u, u)}$
Fin

12)

Fonction: valeur(P, x)
Action: Calcul de la valeur du polynôme P au point x
Début
  $s \leftarrow 0$
  Pour k **allant de** 0 **à** longueur$(P) - 1$ **faire**
    $s \leftarrow s + P_k x^k$
  FinPour
  Renvoyer s
Fin

13)

Fonction: produit(P, Q)
Action: Calcul du produit des polynômes P et Q
Début
  t **: tableau de taille** longueur(P) + longueur$(Q) - 1$
  Pour k **allant de** 0 **à** longueur$(t) - 1$ **faire**
    $t_k \leftarrow 0$
  FinPour
  Pour k **allant de** 0 **à** longueur$(P) - 1$ **faire**
    Pour l **allant de** 0 **à** longueur$(Q) - 1$ **faire**
      $t_{k+l} = t_{k+l} + P_k Q_l$
    FinPour
  FinPour
  Renvoyer t
Fin

14)

Fonction: colonnes(M)
Action: Construction du tableau t des colonnes de la matrice M
Début
  t **: tableau de taille** longueur(M_0), longueur(M)
  Pour k **allant de** 0 **à** longueur$(M_0) - 1$ **faire**
    Pour l **allant de** 0 **à** longueur$(M) - 1$ **faire**
      $t_{kl} = M_{lk}$
    FinPour
  FinPour
  Renvoyer t
Fin

15)

Fonction: sommesdeslignes(M)
Action: Construction du tableau t des sommes des lignes de la matrice M
Début
  t **: tableau de taille** longueur(M)
  Pour k **allant de** 0 **à** longueur$(M) - 1$ **faire**
    $t_k = 0$
    Pour l **allant de** 0 **à** longueur$(M_k) - 1$ **faire**
      $t_k = t_k + M_{kl}$
    FinPour
  FinPour
  Renvoyer t
Fin

16)

Fonction: sommesdescolonnes(M)
Action: Construction du tableau t des sommes des colonnes de la matrice M
Début
  t **: tableau de taille** longueur$(M[0])$
  Pour l **allant de** 0 **à** longueur$(M[0]) - 1$ **faire**
    $t_l = 0$
    Pour k **allant de** 0 **à** longueur$(M) - 1$ **faire**
      $t_l = t_l + M_{kl}$
    FinPour
  FinPour
  Renvoyer t
Fin

17)

Fonction: conversion(T)
Action: Conversion du tableau T à deux dimensions en un tableau t à une dimension
Début
  t **: tableau de taille** longueur$(M) \times$ longueur(M_0)
  Pour k **allant de** 0 **à** longueur$(M) - 1$ **faire**
    Pour l **allant de** 0 **à** longueur$(M_0) - 1$ **faire**
      $t_{k \times \text{longueur}(M_0) + l} = M_{kl}$
    FinPour
  FinPour
  Renvoyer t
Fin

18)

```
Fonction: entiers(n)
Action: Construction de la matrice carrée t des entiers de 1 à n^2
Début
  t : tableau de taille n, n
  Pour i allant de 1 à n^2 faire
    t_kl ← i
    Si l = 0 alors
      Si k = n − 1 alors
        l ← n − 1
        k ← 1
      sinon
        l ← k + 1
        k ← 0
      FinSi
    sinon
      Si k = n − 1 alors
        k ← l + 1
        l ← n − 1
      sinon
        k ← k + 1
        l ← l − 1
      FinSi
    FinSi
  FinPour
  Renvoyer t
Fin
```

ou explicitement :

```
Fonction: f(k, l)
Début
  Renvoyer 1 + k + (k+l)(k+l+1)/2
Fin
Fonction: entiers(n)
Action: Construction de la matrice carrée t des entiers de 1 à n^2
Début
  t : tableau de taille n, n
  Pour k allant de 0 à n − 1 faire
    Pour l allant de 0 à n − 1 faire
      Si k + l < n alors
        t_kl ← f(k, l)
      sinon
        t_kl ← n^2 + 1 − f(n − 1 − k, n − 1 − l)
      FinSi
    FinPour
  FinPour
  Renvoyer t
Fin
```