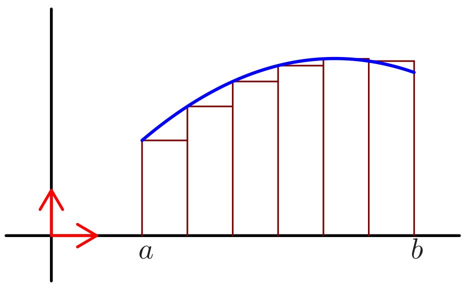
IX. Calcul approché d'intégrales

1 Méthode des rectangles

On rappelle la propriété suivante :

Propriété 1. Sommes de Riemann

Si f est une fonction continue sur l'intervalle $[a;b]$ alors $\dfrac{b-a}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{k=n-1} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.



Remarque 1. *La propriété demeure valable en considérant la somme* $\dfrac{b-a}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)$.

Définition 1. *La* méthode des rectangles *d'approximation de l'intégrale d'une fonction f consiste à approcher celle-ci sur des intervalles $[x_k;x_{k+1}]$ par une fonction constante égale à $f(x_k)$ où $f(x_{k+1})$.*

Exercice 1.

1. *Écrire une fonction **subdivision** de paramètres a, b et n qui retourne le tableau des valeurs $x_k = a+k\dfrac{b-a}{n}$ pour $k \in [\![0;n-1]\!]$.*
2. *Écrire une fonction **image** de paramètres f et x qui retourne le tableau des valeurs des images par la fonction f des valeurs du tableau de nombres x.*
3. *Écrire une fonction **somme** de paramètre y qui retourne la somme des valeurs du tableau de nombres y.*
4. *En déduire une fonction **rectangles** de paramètres f, a, b et n qui retourne la valeur approchée $\dfrac{b-a}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{k=n-1} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)$ de l'intégrale de la fonction f sur l'intervalle $[a;b]$.*

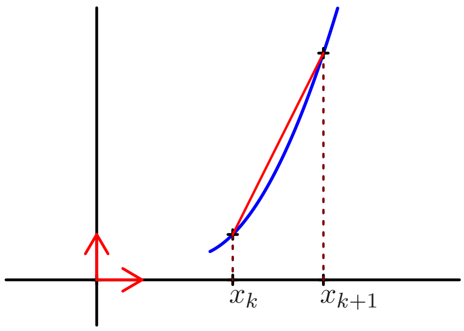
2 Méthode du point milieu

Définition 2. *La* méthode du point milieu *d'approximation de l'intégrale d'une fonction f consiste à approcher celle-ci sur des intervalles $[x_k;x_{k+1}]$ par une fonction constante égale à $f\left(\dfrac{x_k+x_{k+1}}{2}\right)$.*

Exercice 2. *Utiliser les fonctions **subdivision**, **image** et **somme** de l'exercice 1 pour écrire une fonction **pointmilieu** de paramètres f, a, b et n qui retourne la valeur approchée*
$\dfrac{b-a}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{k=n-1} f\left(a+\left(\tfrac{1}{2}+k\right)\frac{b-a}{n}\right)$ *de l'intégrale de la fonction f sur l'intervalle $[a;b]$.*

3 Méthode des trapèzes

Définition 3. *La* méthode des trapèzes *d'approximation de l'intégrale d'une fonction f consiste à approcher celle-ci sur des intervalles $[x_k; x_{k+1}]$ par une fonction affine coïncidant avec f en x_k et x_{k+1}.*



Exercice 3. *Montrer que la méthode des trapèzes conduit à la valeur approchée* $\dfrac{b-a}{n}\left(\dfrac{f(a)+f(b)}{2}+\sum_{k=1}^{k=n-1} f\left(a+k\dfrac{b-a}{n}\right)\right)$ *de l'intégrale de la fonction f sur l'intervalle $[a; b]$.*

Exercice 4. *Utiliser les fonctions* ***subdivision***, ***image*** *et* ***somme*** *de l'exercice 1 pour écrire une fonction* ***trapezes*** *de paramètres f, a, b et n qui retourne la valeur approchée* $\dfrac{b-a}{n}\left(\dfrac{f(a)+f(b)}{2}+\sum_{k=1}^{k=n-1} f\left(a+k\dfrac{b-a}{n}\right)\right)$ *de l'intégrale de la fonction f sur l'intervalle $[a; b]$.*

4 Méthode de Simpson

Définition 4. *La* méthode de Simpson *d'approximation de l'intégrale d'une fonction f consiste à approcher celle-ci sur des intervalles $[x_k; x_{k+1}]$ par une fonction polynomiale de degré 2 coïncidant avec f en x_k, $\dfrac{x_k+x_{k+1}}{2}$ et x_{k+1}.*

Exercice 5. *Montrer que si g est une fonction polynomiale de degré 2 alors* $\displaystyle\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = \frac{b-a}{6}\left(g(a)+4g\left(\frac{a+b}{2}\right)+g(b)\right)$.

En déduire que la méthode de Simpson conduit à la valeur approchée $\dfrac{b-a}{3n}\left(\dfrac{f(a)+f(b)}{2}+\sum_{k=1}^{k=n-1} f\left(a+k\dfrac{b-a}{n}\right)+2\sum_{k=0}^{k=n-1} f\left(a+\left(\tfrac{1}{2}+k\right)\dfrac{b-a}{n}\right)\right)$ *de l'intégrale de la fonction f sur l'intervalle $[a; b]$.*

Exercice 6. *Utiliser les fonctions* ***subdivision***, ***image*** *et* ***somme*** *de l'exercice 1 pour écrire une fonction* ***Simpson*** *de paramètres f, a, b et n qui retourne la valeur approchée* $\dfrac{b-a}{3n}\left(\dfrac{f(a)+f(b)}{2}+\sum_{k=1}^{k=n-1} f\left(a+k\dfrac{b-a}{n}\right)+2\sum_{k=0}^{k=n-1} f\left(a+\left(\tfrac{1}{2}+k\right)\dfrac{b-a}{n}\right)\right)$ *de l'intégrale de la fonction f sur l'intervalle $[a; b]$.*

Exercices supplémentaires

Exercice 7. *Écrire sous forme d'algorithme une fonction* ***pointmilieu*** *de paramètres* f, a, b *et* n *qui retourne la valeur approchée* $\dfrac{b-a}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{k=n-1} f\left(a+\left(\tfrac{1}{2}+k\right)\dfrac{b-a}{n}\right)$ *de l'intégrale de la fonction* f *sur l'intervalle* $[a;b]$ *sans utiliser de variable de type liste ou tableau.*

Exercice 8. *Montrer que la* méthode de Simpson *est exacte pour les fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à* 3.

Exercice 9. méthode de Gauss

1. *Montrer que si* g *est une fonction polynomiale de degré* 3 *alors*
   $\displaystyle\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = \frac{b-a}{2}\left(g\left(\tfrac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{3}}a+\tfrac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}}b\right)+g\left(\tfrac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}}a+\tfrac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{3}}b\right)\right)$.
2. *En déduire que la méthode de Gauss conduit à la valeur approchée*
   $\dfrac{b-a}{2n}\displaystyle\sum_{k=0}^{k=n-1} f\left(a+\left(k+\tfrac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}}\right)\dfrac{b-a}{n}\right)+f\left(a+\left(k+\tfrac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{3}}\right)\dfrac{b-a}{n}\right)$ *de l'intégrale de la fonction* f *sur l'intervalle* $[a;b]$.
3. *Utiliser les fonctions* ***subdivision****,* ***image*** *et* ***somme*** *de l'exercice 1 pour écrire une fonction* ***Gauss*** *de paramètres* f, a, b *et* n *qui retourne la valeur approchée*
   $\dfrac{b-a}{2n}\displaystyle\sum_{k=0}^{k=n-1} f\left(a+\left(k+\tfrac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}}\right)\dfrac{b-a}{n}\right)+f\left(a+\left(k+\tfrac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{3}}\right)\dfrac{b-a}{n}\right)$ *de l'intégrale de la fonction* f *sur l'intervalle* $[a;b]$.

Réponses

1)

Fonction: subdivision(a, b, n)
Action: Création du tableau des valeurs $a + k\frac{b-a}{n}$ pour $k \in [\![0; n-1]\!]$
Début
  x **: tableau de taille** n
  $\delta \leftarrow \frac{b-a}{n}$
  Pour k **allant de** 0 **à** $n-1$ **faire**
    $x_k \leftarrow a + k\delta$
  FinPour
  Renvoyer x
Fin

Fonction: image(f, x)
Action: Création du tableau des valeurs des images par la fonction f des valeurs du tableau de nombres x
Début
  y **: tableau de taille** longueur(x)
  Pour k **allant de** 0 **à** longueur$(x) - 1$ **faire**
    $y_k \leftarrow f(x_k)$
  FinPour
  Renvoyer y
Fin

Fonction: somme(y)
Action: Calcul de la somme des valeurs du tableau de nombres y
Début
  $s \leftarrow 0$
  Pour k **allant de** 0 **à** longueur$(y) - 1$ **faire**
    $s \leftarrow s + y_k$
  FinPour
  Renvoyer s
Fin

Fonction: rectangles(f, a, b, n)
Action: Calcul de la valeur approchée de l'intégrale de la fonction f sur l'intervalle $[a; b]$ par la méthode des rectangles
Début
  Renvoyer $\dfrac{b-a}{n}$somme(image$(f,$ subdivision$(a, b, n)))$
Fin

2)

Fonction: pointmilieu(f, a, b, n)
Action: Calcul de la valeur approchée de l'intégrale de la fonction f sur l'intervalle $[a; b]$ par la méthode du point milieu
Début
  Renvoyer $\dfrac{b-a}{n}$somme(image$(f,$ subdivision$(a + \frac{b-a}{2n}, b + \frac{b-a}{2n}, n)))$
Fin

3) L'aire du trapèze correspondant à l'intervalle $[x_k; x_{k+1}]$ est :

$$\frac{(f(x_k) + f(x_{k+1}))(x_{k+1} - x_k)}{2} = \frac{b-a}{2n}(f(x_k) + f(x_{k+1}))$$

On en déduit la valeur approché de l'intégrale de la fonction f sur l'intervalle $[a; b]$:

$$\sum_{k=0}^{k=n-1} \frac{b-a}{2n}(f(x_k) + f(x_{k+1})) = \frac{b-a}{2n}\left(f(x_0) + f(x_n) + 2\sum_{k=1}^{k=n-1} f(x_k)\right)$$

4)

Fonction: trapezes(f, a, b, n)
Action: Calcul de la valeur approchée de l'intégrale de la fonction f sur l'intervalle $[a; b]$ par la méthode des trapèzes
Début
  Renvoyer $\dfrac{b-a}{n}\left(\dfrac{f(b) - f(a)}{2} + \text{somme(image}(f, \text{subdivision}(a, b, n)))\right)$
Fin

5) Par linéarité, il suffit de vérifier la formule pour les fonctions $g_0 : x \mapsto 1$, $g_1 : x \mapsto x$ et $g_2 : x \mapsto x^2$.

On en déduit la valeur approché de l'intégrale de la fonction f sur l'intervalle $[a;b]$:

$$\sum_{k=0}^{k=n-1} \tfrac{x_{k+1}-x_k}{6}\left(f(x_k)+4f(\tfrac{x_k+x_{k+1}}{2})+f(x_{k+1})\right) = \frac{b-a}{6n}\left(f(x_0)+f(x_n)+2\sum_{k=1}^{k=n-1}f(x_k)+4\sum_{k=0}^{k=n-1}f(\tfrac{x_k+x_{k+1}}{2})\right)$$

6)

Fonction: Simpson(f,a,b,n)
Action: Calcul de la valeur approchée de l'intégrale de la fonction f sur l'intervalle $[a;b]$ par la méthode de Simpson
Début
  $u \leftarrow$ somme(image(f, subdivision(a,b,n)))
  $v \leftarrow$ somme(image(f, subdivision($a+\frac{b-a}{2n}, b+\frac{b-a}{2n}, n$)))
  Renvoyer $\dfrac{b-a}{3n}\left(\dfrac{f(b)-f(a)}{2}+u+2v\right)$
Fin

7)

Fonction: pointmilieu(f,a,b,n)
Action: Calcul de la valeur approchée de l'intégrale de la fonction f sur l'intervalle $[a;b]$ par la méthode du point milieu
Début
  $\delta \leftarrow \frac{b-a}{n}$
  $x \leftarrow a+\frac{d}{2}$
  $s \leftarrow 0$
  Pour k **allant de** 0 **à** $n-1$ **faire**
    $s \leftarrow s+f(x)$
    $x \leftarrow x+\delta$
  FinPour
  Renvoyer $\dfrac{b-a}{n}s$
Fin

8) Par linéarité, il suffit de vérifier la formule $\displaystyle\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = \frac{b-a}{6}\left(g(a)+4g\left(\frac{a+b}{2}\right)+g(b)\right)$ pour les fonctions $g_0 : x \mapsto 1$, $g_1 : x \mapsto x$, $g_2 : x \mapsto x^2$ et $g_3 : x \mapsto x^3$.

9)
- Par linéarité, il suffit de vérifier la formule pour les fonctions $g_0 : x \mapsto 1$, $g_1 : x \mapsto x$, $g_2 : x \mapsto x^2$ et $g_3 : x \mapsto x^3$.
- On simplifie $\displaystyle\sum_{k=0}^{k=n-1}\frac{x_{k+1}-x_k}{2}\left(f\left(\tfrac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{3}}x_k+\tfrac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}}x_{k+1}\right)+f\left(\tfrac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}}x_k+\tfrac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{3}}x_{k+1}\right)\right)$.
- **Fonction**: Gauss(f,a,b,n)
  Action: Calcul de la valeur approchée de l'intégrale de la fonction f sur l'intervalle $[a;b]$ par la méthode de Gauss
  Début
    $u \leftarrow$ somme(image(f, subdivision($a+\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}}\frac{b-a}{n}, b+\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}}\frac{b-a}{n}, n$)))
    $v \leftarrow$ somme(image(f, subdivision($a+\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{3}}\frac{b-a}{n}, b+\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{3}}\frac{b-a}{n}, n$)))
    Renvoyer $\dfrac{b-a}{2n}(u+v)$
  Fin