

X. Résolution approchée d'une équation différentielle

1 Méthode d'Euler

1.1 Méthode d'Euler pour une équation différentielle du premier ordre

Définition 1. La méthode d'Euler d'approximation de la solution y d'une équation différentielle d'ordre 1 de la variable t avec condition initiale $y(t_0) = y_0$ consiste à construire des approximations successives $(y_0; y'_0), (y_1; y'_1), (y_2; y'_2), \dots, (y_n; y'_n)$ des valeurs du couple $(y; y')$ aux points $t_0, t_1, t_2, \dots, t_n$ selon le schéma suivant :

- On écrit l'équation différentielle au point t_k , on remplace $y(t_k)$ par la valeur approchée y_k et $y'(t_k)$ par la valeur approchée y'_k puis on en déduit une expression de y'_k en fonction de t_k et y_k .
- On pose $y_{k+1} = y_k + (t_{k+1} - t_k)y'_k$.

Exercice 1. On considère l'équation différentielle $\begin{cases} y' + ty = 0 \\ y(t_0) = 1 \end{cases}$.

1. Expliciter le schéma d'Euler d'approximation de la solution de cette équation différentielle.
2. Écrire une fonction **euler_gaussienne** de paramètre t qui retourne le tableau des valeurs approchées y_k aux points t_k pour $k \in \llbracket 0; \text{longueur}(t) - 1 \rrbracket$.

Exercice 2. On considère le système différentiel $\begin{cases} x' = y \\ y' = -x \\ x(t_0) = 0 \\ y(t_0) = 1 \end{cases}$.

1. Expliciter le schéma d'Euler d'approximation de la solution de cette équation différentielle.
2. Écrire une fonction **euler_circulaire** de paramètre t qui retourne le tableau des valeurs approchées x_k ainsi que le tableau des valeurs approchées y_k aux points t_k pour $k \in \llbracket 0; \text{longueur}(t) - 1 \rrbracket$.

Exercice 3.

1. Écrire une équation différentielle linéaire d'ordre 1 avec condition initiale en $t = 0$ admettant pour solution la fonction exponentielle.
2. Expliciter le schéma d'Euler d'approximation de la solution de cette équation différentielle.
3. Écrire une fonction **euler_exponentielle** de paramètre n qui retourne le tableau des valeurs approchées y_k aux points $t_k = \frac{k}{n}$ pour $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$.

1.2 Méthode d'Euler pour une équation différentielle du second ordre

Définition 2. La méthode d'Euler d'approximation de la solution y d'une équation différentielle d'ordre 2 de la variable t avec condition initiale $(y(t_0) = y_0; y'(t_0) = y'_0)$ consiste à construire des approximations successives $(y_0; y'_0; y''_0), (y_1; y'_1; y''_1), (y_2; y'_2; y''_2), \dots, (y_n; y'_n; y''_n)$ des valeurs du triplet $(y; y'; y'')$ aux points $t_0, t_1, t_2, \dots, t_n$ selon le schéma suivant :

- On écrit l'équation différentielle au point t_k , on remplace $y(t_k)$ par la valeur approchée y_k , $y'(t_k)$ par la valeur approchée y'_k et $y''(t_k)$ par la valeur approchée y''_k puis on en déduit une expression de y''_k en fonction de t_k , y_k et y'_k .
- On pose $y_{k+1} = y_k + (t_{k+1} - t_k)y'_k$.
- On pose $y'_{k+1} = y'_k + (t_{k+1} - t_k)y''_k$.

Exercice 4. On considère l'équation différentielle
$$\begin{cases} y'' + ty' + y = 0 \\ y(t_0) = 1 \\ y'(t_0) = 0 \end{cases} .$$

1. Expliciter le schéma d'Euler d'approximation de la solution de cette équation différentielle.
2. Écrire une fonction **euler_gaussienne** de paramètre t qui retourne le tableau des valeurs approchées y_k aux points t_k pour $k \in \llbracket 0; \text{longueur}(t) - 1 \rrbracket$.

Exercice 5.

1. Écrire une équation différentielle linéaire d'ordre 2 avec condition initiale en $t = 0$ admettant pour solution la fonction sinus.
2. Expliciter le schéma d'Euler d'approximation de la solution de cette équation différentielle.
3. Écrire une fonction **euler_sinus** de paramètre n qui retourne le tableau des valeurs approchées y_k aux points $t_k = \frac{k}{n}$ pour $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$

2 Méthodes de Runge-Kutta

Définition 3. Les méthodes de Runge-Kutta d'approximation de la solution y d'une équation différentielle d'ordre 1 de la variable t avec condition initiale $y(t_0) = y_0$ consistent à construire des approximations successives y_1, y_2, \dots, y_n des valeurs de y aux points t_1, t_2, \dots, t_n au moyen d'une relation de récurrence obtenue par calcul approché de l'intégrale $\int_{t_k}^{t_{k+1}} y'(t) dt = y(t_{k+1}) - y(t_k)$.

Remarque 1. La méthode d'Euler est une méthode de Runge-Kutta basée sur la méthode des rectangles.

Exercice 6. On considère l'équation différentielle
$$\begin{cases} y' + ty = 0 \\ y(t_0) = 1 \end{cases} .$$

1. Montrer que la méthode de Runge-Kutta basée sur la méthode du point milieu conduit à l'approximation $y_{k+1} = y_k + (t_{k+1} - t_k)y'_{k+\frac{1}{2}}$ avec $y'_{k+\frac{1}{2}}$ une valeur approchée de $y' \left(\frac{t_k + t_{k+1}}{2} \right)$.
2. Utiliser le schéma d'Euler pour exprimer une valeur approchée $y_{k+\frac{1}{2}}$ de $y \left(\frac{t_k + t_{k+1}}{2} \right)$ en fonction de t_k , t_{k+1} et y_k puis une valeur approchée $y'_{k+\frac{1}{2}}$ de $y' \left(\frac{t_k + t_{k+1}}{2} \right)$ en fonction de t_k , t_{k+1} et $y_{k+\frac{1}{2}}$.
3. Écrire une fonction **runge_gaussienne** de paramètre t qui retourne le tableau des valeurs approchées y_k aux points t_k pour $k \in \llbracket 0; \text{longueur}(t) - 1 \rrbracket$.

Exercices supplémentaires

Exercice 7. La méthode d'Euler implicite d'approximation de la solution y d'une équation différentielle d'ordre 1 de la variable t avec condition initiale $y(t_0) = y_0$ consiste à construire des approximations successives y_1, y_2, \dots, y_n des valeurs de y aux points t_1, t_2, \dots, t_n selon le schéma suivant :

- On écrit l'équation différentielle au point t_{k+1} , on remplace $y(t_{k+1})$ par la valeur approchée y_{k+1} et $y'(t_{k+1})$ par la valeur approchée y'_{k+1} puis on en déduit une expression de y'_{k+1} en fonction de t_{k+1} et y_{k+1} .
- On pose $y_{k+1} = y_k + (t_{k+1} - t_k)y'_{k+1}$.
- On en déduit une expression de y_{k+1} en fonction t_k, t_{k+1} et y_k .

Expliciter le schéma d'Euler implicite d'approximation de la solution de l'équation différentielle $\begin{cases} y' + ty = 0 \\ y(t_0) = 1 \end{cases}$.

Exercice 8. On considère l'équation différentielle $\begin{cases} y' - y^2 = 1 \\ y(0) = 0 \end{cases}$.

1. Expliciter le schéma d'Euler d'approximation de la solution de cette équation différentielle.
2. Écrire une fonction **euler_tangente** de paramètre n qui retourne le tableau des valeurs approchées y_k aux points $t_k = -1 + \frac{k}{n}$ pour $k \in \llbracket 0; 2n \rrbracket$

Exercice 9.

1. Écrire une équation différentielle linéaire d'ordre 2 avec condition initiale en $t = 0$ admettant pour solution la fonction cosinus.
2. Expliciter le schéma d'Euler d'approximation de la solution de cette équation différentielle.
3. Écrire une fonction **euler_cosinus** de paramètre n qui retourne le tableau des valeurs approchées y_k aux points $t_k = \frac{k}{n}$ pour $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$

Exercice 10. On considère l'équation différentielle $\begin{cases} y' + ty = 0 \\ y(t_0) = 1 \end{cases}$.

1. Montrer que la méthode de Runge-Kutta basée sur la méthode des trapèzes conduit à l'approximation $y_{k+1} = y_k + (t_{k+1} - t_k) \frac{\widetilde{y'_k} + \widetilde{y'_{k+1}}}{2}$ avec $\widetilde{y'_{k+1}}$ une valeur approchée temporaire de $y'(t_{k+1})$.
2. Utiliser le schéma d'Euler pour exprimer une valeur approchée temporaire $\widetilde{y_{k+1}}$ de $y(t_{k+1})$ en fonction de t_k, t_{k+1}, y_k et y'_k puis une valeur approchée temporaire $\widetilde{y'_{k+1}}$ de $y'(t_{k+1})$ en fonction de t_k, t_{k+1} et $\widetilde{y_{k+1}}$.
3. Écrire une fonction **heun_gaussienne** de paramètre t qui retourne le tableau des valeurs approchées y_k aux points t_k pour $k \in \llbracket 0; \text{longueur}(t) - 1 \rrbracket$.

Réponses

$$1) \bullet \begin{cases} y_0 = 1 \\ y'_k = -t_k y_k \\ y_{k+1} = y_k + (t_{k+1} - t_k) y'_k \end{cases}$$

Fonction: euler_gaussienne(t)
Action: Approximation de la fonction gaussienne par la méthode d'Euler aux points t_k
Début
 y : tableau de taille longueur(t)
 $y_0 \leftarrow 1$
Pour k allant de 1 à longueur(t) - 1 **faire**
 $u \leftarrow -t_{k-1} y_{k-1}$
 $y_k \leftarrow y_{k-1} + (t_k - t_{k-1}) u$
FinPour
Renvoyer y
Fin

$$2) \bullet \begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 1 \\ x'_k = y_k \\ y'_k = -x_k \\ x_{k+1} = x_k + (t_{k+1} - t_k) x'_k \\ y_{k+1} = y_k + (t_{k+1} - t_k) y'_k \end{cases}$$

Fonction: euler_circulaire(t)
Action: Approximation des fonctions circulaires par la méthode d'Euler aux points t_k
Début
 x : tableau de taille longueur(t)
 y : tableau de taille longueur(t)
 $x_0 \leftarrow 0$
 $y_0 \leftarrow 1$
Pour k allant de 1 à longueur(t) - 1 **faire**
 $u \leftarrow y_{k-1}$
 $v \leftarrow -x_{k-1}$
 $x_k \leftarrow x_{k-1} + (t_k - t_{k-1}) u$
 $y_k \leftarrow y_{k-1} + (t_k - t_{k-1}) v$
FinPour
Renvoyer x, y
Fin

$$3) \bullet \begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1 \\ y_0 = 1 \\ y'_k = y_k \\ y_{k+1} = y_k + (t_{k+1} - t_k) y'_k \end{cases}$$

Fonction: euler_exponentielle(n)
Action: Approximation de la fonction exponentielle par la méthode d'Euler aux points $\frac{k}{n}$ pour $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$
Début
 y : tableau de taille $n + 1$
 $y_0 \leftarrow 1$
Pour k allant de 1 à n **faire**
 $u \leftarrow y_{k-1}$
 $y_k \leftarrow y_{k-1} + \frac{1}{n} u$
FinPour
Renvoyer y
Fin

$$4) \bullet \begin{cases} y_0 = 1 \\ y'_0 = 0 \\ y''_k = -y_k - t_k y'_k \\ y_{k+1} = y_k + (t_{k+1} - t_k) y'_k \\ y'_{k+1} = y'_k + (t_{k+1} - t_k) y''_k \end{cases}$$

```

Fonction: euler_gaussienne(t)
Action: Approximation de la fonction gaussienne par la méthode d'Euler aux points  $t_k$ 
Début
  |  $y$  : tableau de taille longueur(t)
  |  $y_0 \leftarrow 1$ 
  |  $u \leftarrow 0$ 
  | Pour  $k$  allant de 1 à longueur(t) - 1 faire
  |   |  $v \leftarrow -y_{k-1} - t_{k-1}u$ 
  |   |  $y_k \leftarrow y_{k-1} + (t_k - t_{k-1})u$ 
  |   |  $u \leftarrow u + (t_k - t_{k-1})v$ 
  | FinPour
  | Renvoyer  $y$ 
Fin
    
```

5) •
$$\begin{cases} y'' + y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases} .$$

•
$$\begin{cases} y_0 = 0 \\ y'_0 = 1 \\ y''_k = -y_k \\ y_{k+1} = y_k + (t_{k+1} - t_k)y'_k \\ y'_{k+1} = y'_k + (t_{k+1} - t_k)y''_k \end{cases}$$

```

Fonction: euler_sinus(n)
Action: Approximation de la fonction sinus par la méthode d'Euler aux points  $\frac{k}{n}$  pour  $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$ 
Début
  |  $y$  : tableau de taille  $n + 1$ 
  |  $y_0 \leftarrow 0$ 
  |  $u \leftarrow 1$ 
  | Pour  $k$  allant de 1 à  $n$  faire
  |   |  $v \leftarrow -y_{k-1}$ 
  |   |  $y_k \leftarrow y_{k-1} + \frac{1}{n}u$ 
  |   |  $u \leftarrow u + \frac{1}{n}v$ 
  | FinPour
  | Renvoyer  $y$ 
Fin
    
```

6) • La méthode du point milieu conduit à l'approximation :

$$y(t_{k+1}) - y(t_k) = \int_{t_k}^{t_{k+1}} y'(t) dt \simeq (t_{k+1} - t_k)y' \left(\frac{t_k + t_{k+1}}{2} \right)$$

•
$$\begin{cases} y_0 = 0 \\ y'_k = -t_k y_k \\ y_{k+\frac{1}{2}} = y_k + \frac{t_{k+1}-t_k}{2} y'_k \\ y'_{k+\frac{1}{2}} = -\frac{t_k+t_{k+1}}{2} y_{k+\frac{1}{2}} \\ y_{k+1} = y_k + (t_{k+1} - t_k)y'_{k+\frac{1}{2}} \end{cases}$$

```

Fonction: runge_gaussienne(t)
Action: Approximation de la fonction gaussienne par la méthode de Runge aux points  $t_k$ 
Début
  |  $y$  : tableau de taille longueur(t)
  |  $y_0 \leftarrow 1$ 
  | Pour  $k$  allant de 1 à longueur(t) - 1 faire
  |   |  $u \leftarrow -t_{k-1}y_{k-1}$ 
  |   |  $v \leftarrow y_{k-1} + \frac{t_k - t_{k-1}}{2}u$ 
  |   |  $w \leftarrow -\frac{t_{k-1} + t_k}{2}v$ 
  |   |  $y_k \leftarrow y_{k-1} + (t_k - t_{k-1})w$ 
  | FinPour
  | Renvoyer  $y$ 
Fin
    
```

7)
$$\begin{cases} y_0 = 1 \\ y_{k+1} = \frac{y_k}{1 + (t_{k+1} - t_k)t_{k+1}} \end{cases}$$

$$8) \bullet \begin{cases} y_0 = 1 \\ y'_k = 1 + y_k^2 \\ y_{k+1} = y_k + (t_{k+1} - t_k)y'_k \end{cases}$$

Fonction: euler_tangente(n)
Action: Approximation de la fonction tangente par la méthode d'Euler aux points $-1 + \frac{k}{n}$ pour $k \in \llbracket 0; 2n \rrbracket$
Début
 y : tableau de taille $2n + 1$
 $y_n \leftarrow 0$
Pour k allant de 1 à n faire
 $u \leftarrow 1 + y_{n+k-1}^2$
 $y_{n+k} \leftarrow y_{n+k-1} + \frac{1}{n}u$
FinPour
Pour k allant de 1 à n faire
 $u \leftarrow 1 + y_{n-k+1}^2$
 $y_{n-k} \leftarrow y_{n-k+1} - \frac{1}{n}u$
FinPour
Renvoyer y
Fin

$$9) \bullet \begin{cases} y'' + y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

$$\bullet \begin{cases} y_0 = 1 \\ y'_0 = 0 \\ y''_k = -y_k \\ y_{k+1} = y_k + (t_{k+1} - t_k)y'_k \\ y'_{k+1} = y'_k + (t_{k+1} - t_k)y''_k \end{cases}$$

Fonction: euler_cosinus(n)
Action: Approximation de la fonction cosinus par la méthode d'Euler aux points $\frac{k}{n}$ pour $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$
Début
 y : tableau de taille $n + 1$
 $y_0 \leftarrow 1$
 $u \leftarrow 0$
Pour k allant de 1 à n faire
 $v \leftarrow -y_{k-1}$
 $y_k \leftarrow y_{k-1} + \frac{1}{n}u$
 $u \leftarrow u + \frac{1}{n}v$
FinPour
Renvoyer y
Fin

10) • La méthode des trapèzes conduit à l'approximation :

$$y(t_{k+1}) - y(t_k) = \int_{t_k}^{t_{k+1}} y'(t) dt \simeq (t_{k+1} - t_k) \frac{y'(t_k) + y'(t_{k+1})}{2}$$

$$\bullet \begin{cases} y_0 = 0 \\ y'_k = -t_k y_k \\ \widetilde{y}_{k+1} = y_k + (t_{k+1} - t_k)y'_k \\ y'_{k+1} = -t_{k+1} \widetilde{y}_{k+1} \\ y_{k+1} = y_k + (t_{k+1} - t_k) \frac{y'_k + \widetilde{y}'_{k+1}}{2} \end{cases}$$

Fonction: heun_gaussienne(t)
Action: Approximation de la fonction gaussienne par la méthode de Heun aux points t_k
Début
 y : tableau de taille longueur(t)
 $y_0 \leftarrow 1$
Pour k allant de 1 à longueur(t) - 1 faire
 $u \leftarrow -t_{k-1}y_{k-1}$
 $v \leftarrow y_{k-1} + (t_k - t_{k-1})u$
 $w \leftarrow -t_k v$
 $y_k \leftarrow y_{k-1} + (t_k - t_{k-1}) \frac{u+w}{2}$
FinPour
Renvoyer y
Fin