

01. Éléments de logique

1 Logique booléenne

La *logique booléenne* traite des énoncés ayant une valeur de vérité (Vrai ou Faux), par exemple les *propositions* A : « Le soleil brille » et B : « Je suis en cours d'informatique ».

Elle utilise les opérateurs logiques NON (*négation*), ET (*conjonction*), OU (*disjonction inclusive*).

Exercice 1. Compléter la *table de vérité* suivante :

A	B	A ET B	A OU B
V	V		
V	F		
F	V		
F	F		

Exercice 2. Montrer en utilisant une table de vérité que la proposition A OU NON(A) (*loi du tiers-exclu*) est une *tautologie*.

2 Théorème de De Morgan

Exercice 3. Démontrer en utilisant des tables de vérité que $\text{NON}(A \text{ ET } B) = \text{NON}(A) \text{ OU } \text{NON}(B)$ et que $\text{NON}(A \text{ OU } B) = \text{NON}(A) \text{ ET } \text{NON}(B)$ (*Théorème de De Morgan*).

Exercice 4. Exprimer le OU exclusif (table de vérité ci-dessous) à l'aide des opérateurs NON, ET, OU.

A	B	
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

3 Fonctions logiques à trois variables

Exercice 5. Montrer en utilisant des tables de vérité que la proposition A ET (B OU C) n'est pas équivalente à la proposition (A ET B) OU C.

Exercice 6. Comparer les propositions A ET (B ET C) et (A ET B) ET C ainsi que les propositions A OU (B OU C) et (A OU B) OU C.

Exercice 7. Démontrer que $A \text{ ET } (B \text{ OU } C) = (A \text{ ET } B) \text{ OU } (A \text{ ET } C)$ et que $A \text{ OU } (B \text{ ET } C) = (A \text{ OU } B) \text{ ET } (A \text{ OU } C)$.

4 Prolongement

En *logique classique*, on définit l'*implication* par $A \Rightarrow B = \text{NON}(A \text{ ET } \text{NON}(B))$.

Exercice 8. Démontrer que $A \Rightarrow B = \text{NON}(B) \Rightarrow \text{NON}(A)$ (*contraposition*).

Exercice 9. Démontrer que $A \Rightarrow B = (A \text{ ET } \text{NON}(B)) \Rightarrow \text{NON}(A)$ (*raisonnement par l'absurde*).

Exercice 10. Démontrer que $((A \Rightarrow B) \text{ ET } (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$ est une tautologie.