16. Calcul approché d'une intégrale

Nous utiliserons dans ce TP l'environnement de développement Spyder.

Le but du TP est de calculer une valeur approchée de l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$.

1. Calculer la valeur exacte de l'intégrale I.

2. Créer en langage Python une fonction de la variable n nommée *subdivision* permettant de créer une liste de $n+1$ flottants de 0 à 1 en progression arithmétique.
(par exemple pour l'entrée $n = 4$ la fonction doit renvoyer la liste $[0,\ 0.25,\ 0.5,\ 0.75,\ 1]$)

3. Créer en langage Python une fonction de la variable l nommée *image* permettant d'obtenir la liste des images par la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$ des valeurs d'une liste l.
(par exemple pour l'entrée $l = [1,\ 2,\ 3]$ la fonction doit renvoyer la liste $[0.5,\ 0.2,\ 0.1]$)

4. Créer en langage Python une fonction des variables l, a et b nommée *somme* permettant de calculer la somme des valeurs d'indices compris entre a et b d'une liste l.
(par exemple pour l'entrée $l = [0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4]$, $a = 1$ et $b = 3$, la fonction doit renvoyer la valeur 6)

5. Utiliser les fonctions *subdivision*, *image* et *somme* pour créer en langage Python une fonction de la variable n nommée *rectangle* permettant de calculer $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{k=n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$.
Vérifier que $rectangle(100)$ approche I à 10^{-2} près.

6. Utiliser les fonctions *subdivision*, *image* et *somme* pour créer en langage Python une fonction de la variable n nommée *trapeze* permettant de calculer $\displaystyle\frac{1}{n}\left(\frac{f(0)+f(1)}{2} + \sum_{k=1}^{k=n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)\right)$.
Vérifier que $trapeze(100)$ approche I à 10^{-5} près.

7. Créer en langage Python une fonction des variables l, a et b nommée *pseudosomme* permettant de calculer la somme des valeurs d'indices compris entre a et b d'une liste l en comptant double celles d'indices impairs.

8. Utiliser les fonctions *subdivision*, *image* et *pseudosomme* pour créer en langage Python une fonction de la variable n nommée *simpson* permettant de calculer $\displaystyle\frac{1}{3n}\left(\frac{f(0)+f(1)}{2} + 2\sum_{k=0}^{k=n-1} f\left(\frac{2k+1}{2n}\right) + \sum_{k=1}^{k=n-1} f\left(\frac{2k}{2n}\right)\right)$.
Vérifier que $simpson(50)$ approche I à 10^{-13} près.