I. Variables

1 Représentation binaire des nombres

L'*écriture décimale positionnelle d'un nombre entier* utilise les puissances de 10 et les symboles 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 et 9. Ainsi l'écriture 234 correspond à l'entier $2\times 100+3\times 10+4\times 1 = 2\times 10^2+3\times 10^1+4\times 10^0$.

On peut suivant ce principe définir l'*écriture binaire d'un nombre entier* qui utilise les puissances de 2 et les symboles 0 et 1.

Définition 1. **Écriture binaire d'un nombre entier naturel**
Tout entier naturel non nul peut s'écrire de manière unique sous la forme $a_n\times 2^n+\cdots+a_2\times 2^2+a_1\times 2^1+a_0\times 2^0$ *avec* n *un entier et* $a_n,\ldots,a_2,a_1,a_0\in\{0,1\}$ *avec* $a_n\neq 0$. *L'écriture* $a_na_{n-1}\ldots a_2a_1a_0$ *est appelée l'*écriture binaire *de cet entier.*

Remarque 1. *On note* 0 *l'écriture binaire de l'entier nul.*

Exemple 1. *L'écriture binaire de l'entier* 234 *est* 11101010 *car* $234 = 1.2^7+1.2^6+1.2^5+0.2^4+1.2^3+0.2^2+1.2^1+0.2^0$.

Exercice 1. *Quel entier correspond à l'écriture binaire* 1001101 *?*

Exercice 2. *Donner l'écriture binaire des nombres entiers compris entre* 0 *et* 10.

Exercice 3. *Déterminer l'écriture binaire de l'entier* 342.

En informatique, le symbole 0 ou 1 s'appelle un *bit* (*binary digit*), un groupe de 8 bits s'appelle un *octet*. Il existe plusieurs façons de représenter les nombres en utilisant un nombre de bits déterminé.

Définition 2. **Codage d'un nombre entier naturel sur n bits**
Le codage d'un nombre entier naturel sur n *bits correspond à son écriture binaire complétée si nécessaire par des zéros à gauche.*

Exemple 2.

entier naturel	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*	*11*	*12*	*13*	*14*	*15*
codage sur 4 bits	0000	0001	0010	0011	0100	0101	0110	0111	1000	1001	1010	1011	1100	1101	1110	1111

Exercice 4. *Quels sont les entiers naturels que l'on peut représenter au moyen d'un codage sur* n *bits ?*

Pour représenter les entiers relatifs on pourrait utiliser un bit pour coder le signe et les autres pour coder la partie numérique, l'inconvénient de cette méthode est qu'elle n'est pas compatible avec l'addition, par ailleurs l'entier 0 admet deux représentations.

Pour remédier à ces défauts, on a inventé la *méthode du complément*.

Définition 3. **Codage d'un nombre entier relatif sur n bits**
Le codage d'un nombre entier relatif sur n *bits correspond à son codage en tant qu'entier naturel si celui-ci est positif et au codage en tant qu'entier naturel du complément à* 2^n *de sa valeur absolue si celui-ci est négatif.*

Exemple 3.

entier relatif	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*-8*	*-7*	*-6*	*-5*	*-4*	*-3*	*-2*	*-1*
codage sur 4 bits	0000	0001	0010	0011	0100	0101	0110	0111	1000	1001	1010	1011	1100	1101	1110	1111

Exercice 5. *Quels sont les entiers relatifs que l'on peut représenter par un codage sur* n *bits avec la méthode du complément ?*

Exercice 6. *Quel est le codage sur* 8 *bits de l'entier relatif* -100 *avec la méthode du complément ?*

Définition 4. **Écriture binaire à virgule fixe**
L'écriture $a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0, b_1 b_2 \dots b_{m-1} b_m$ *avec* m, n *entiers,* $a_n, \dots, a_1, a_0 \in \{0, 1\}$ *et* $b_1, b_2, \dots, b_m \in \{0, 1\}$ *est appelée* écriture binaire à virgule fixe*, elle représente le nombre* $a_n \times 2^n + \dots + a_2 \times 2^2 + a_1 \times 2^1 + a_0 \times 2^0 + b_1 \times 2^{-1} + b_2 \times 2^{-2} + b_m \times 2^{-m}$.

Exemple 4. *L'écriture binaire à virgule fixe* $101,011$ *représente le nombre* $1.2^2 + 0.2^1 + 1.2^0 + 0.2^{-1} + 1.2^{-2} + 1.2^{-3} = 5,375$.

Exercice 7. *Quelle écriture binaire à virgule fixe représente le nombre* $3,3125$ *?*

Exercice 8. *Quels sont les nombres qui peuvent être représentés par une écriture binaire à virgule fixe ?*

Suivant le principe de la *notation scientifique* qui utilise les puissances de 10 et un nombre compris entre 1 et 10, on définit l'*écriture à virgule flottante* qui utilise les puissances de 2 et un nombre compris entre 1 et 2.

Définition 5. **Écriture binaire à virgule flottante**
L'écriture $1, b_1 b_2 \dots b_{m-1} b_m \times 2^n$ *avec* m, n *entiers et* $b_1, b_2, \dots, b_m \in \{0, 1\}$ *est appelée* écriture binaire à virgule flottante*, elle représente le nombre* $(1 + b_1 \times 2^{-1} + b_2 \times 2^{-2} + \dots + b_m \times 2^{-m}) \times 2^n$.
L'entier n *est appelé* exposant *et le nombre représenté par l'écriture binaire* $1, b_1 b_2 \dots b_{m-1} b_m$ *est appelé* mantisse.

Exemple 5. *L'écriture binaire à virgule flottante* $1,011 \times 2^2$ *représente le nombre* $(1 + 0.2^{-1} + 1.2^{-2} + 1.2^{-3}) \times 2^2 = 5,5$.

Exercice 9. *Quelle écriture binaire à virgule flottante représente le nombre* $0,09375$ *?*

2 Variables

Définition 6. *Une* variable informatique *associe à un* nom *une* valeur*, le codage utilisé pour représenter cette valeur est appelé* type *de la variable.*
L'instruction consistant à donner un nom et un type à une variable est appelée déclaration.
L'instruction consistant à donner une valeur à une variable est appelée affectation.

Exemple 6. $e \leftarrow 8$
La variable (de type entier) nommée e prend la valeur 8.

Les types simples sont les *booléens*, les *entiers*, les *flottants* et les *chaînes de caractères.*

Exercice 10. *Pour chacune des affectations ci-dessous, déterminer nom, type et valeur de la variable.*
$b \leftarrow Faux$
$c \leftarrow "salut"$
$f \leftarrow 9.375$

Définition 7. *On appelle* expression informatique *une combinaison de variables, valeurs, opérateurs, fonctions renvoyant une valeur.*

Exemple 7. 1, $2 + 3$, $e - 5$, $x \times sin(x)$ *sont des expressions.*

Exercice 11. *Que réalise l'affectation suivante ?*
$e \leftarrow 2 \times e$

3 Notion d'algorithme

Définition 8. *On appelle* algorithme *une suite finie d'instructions. Un algorithme comporte des variables d'*entrée *et des variables de* sortie.

Exemple 8. *Calcul de la moyenne de deux nombres.*

Entrée: *variables x et y réelles*
Sortie: *variable réelle m dont la valeur est égale à la moyenne des valeurs de x et y*
Début
| $m \leftarrow \frac{x+y}{2}$
Fin

Exercice 12. *Prouver que l'algorithme suivant échange les valeurs des variables x et y en remplissant le tableau ci-contre.*

Entrée: *variables x et y*
Sortie: *variables x et y après échange de leurs valeurs*
Début
| $t \leftarrow x$
| $x \leftarrow y$
| $y \leftarrow t$
Fin

	valeur de x	*valeur de y*	*valeur de t*
Début	a	b	
$t \leftarrow x$	...	...	...
$x \leftarrow y$	...	...	...
$y \leftarrow t$	...	...	...
Fin	...	...	

Remarque 2. *La variable t de l'algorithme précédent qui n'est pas une variable d'entrée ni de sortie est dite* temporaire.

Définition 9. *Une* instruction conditionnelle *est une instruction qui n'est exécutée que si une condition spécifiée est réalisée, une* instruction alternative *peut également être fournie pour le cas où la condition n'est pas réalisée.*

Exemple 9. *Calcul de la racine carrée d'un nombre.*

Entrée: *variable réelle x*
Sortie: *variable réelle r dont la valeur est égale à la racine carrée de la valeur de x*
Début
| **si** $x \geqslant 0$ **alors**
| | $r \leftarrow \sqrt{x}$
| **fin**
Fin

Exemple 10. *Calcul du maximum de deux nombres.*

Entrée: *variables réelles x et y*
Sortie: *variable réelle M dont la valeur est égale au maximum des valeurs de x et de y*
Début
| **si** $x < y$ **alors**
| | $M \leftarrow y$
| **sinon**
| | $M \leftarrow x$
| **fin**
Fin

Exercice 13. *Créer un algorithme permettant d'obtenir le maximum des valeurs de trois variables réelles x, y et z.*

Exercices supplémentaires

Exercice 14. *Effectuer l'addition des entiers naturels* 13 *et* 22 *en binaire puis vérifier le résultat.*

Exercice 15. *On considère l'écriture binaire* $a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0$ *d'un nombre entier naturel. Déterminer le quotient et le reste de sa division euclidienne par* 2*, en déduire un algorithme de calcul de l'écriture binaire d'un nombre entier naturel.*

Exercice 16. *L'*écriture hexadécimale d'un nombre entier *utilise les puissances de* 16 *et les symboles* 0*,* 1*,* 2*,* 3*,* 4*,* 5*,* 6*,* 7*,* 8*,* 9*,* A*,* B*,* C*,* D*,* E *et* F*.*

Déterminer l'entier correspondant à l'écriture hexadécimale $4D2$ *puis l'écriture hexadécimale de l'entier* 459*.*

Exercice 17. *Effectuer l'addition des entiers relatifs* 107 *et* -123 *en codage binaire sur* 8 *bits avec la méthode du complément puis vérifier le résultat.*

Exercice 18. *Montrer que le codage d'un entier négatif sur* n *bits avec la méthode du complément peut s'obtenir en inversant les bits du codage de son opposé puis en ajoutant* 1 *au résultat.*

Exercice 19. *La norme IEE 754 définit le format en* simple précision *sur* 32 *bits de la manière suivante : le premier bit représente le signe (*0 *pour* $+$ *et* 1 *pour* $-$*), les* 8 *bits suivants représentent l'écriture binaire de l'exposant plus* 127 *et les* 23 *bits restants l'écriture binaire de la partie après la virgule de la mantisse.*

Déterminer le nombre codé par 0100 0100 0011 1100 1000 0000 0000 0000 *en simple précision.*

Exercice 20. *Créer un algorithme permettant d'échanger les valeurs de deux variables* x *et* y *sans utiliser de variable intermédiaire. (on pourra utiliser la somme et la différence des valeurs de* x *et* y*)*

Exercice 21. *Quelle est la fonction logique correspondant à l'algorithme suivant ?*

```
Entrée: variables booléennes x et y
Sortie: variable booléenne z
Début
    si x alors
        si y alors
            z ← Vrai
        sinon
            z ← Faux
        fin
    sinon
        z ← Faux
    fin
Fin
```

Exercice 22. *Créer un algorithme correspondant à la fonction logique OU.*

Exercice 23. *Démontrer en utilisant des tables de vérité que NON(x ET y) = NON(x) OU NON(y) et que NON(x OU y) = NON(x) ET NON(y) (*Théorème de De Morgan*).*

Exercice 24. *En* logique classique*, on définit l'*implication *par A⇒B = NON(A ET NON(B)).*

- *Démontrer que A⇒B = NON(B)⇒NON(A) (*contraposition*).*
- *Démontrer que A⇒B = (A ET NON(B))⇒NON(A) (*raisonnement par l'absurde*).*

Réponses

1) 77

2)

entier	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
écriture binaire	0	1	10	11	100	101	110	111	1000	1001	1010

3) 101010110

4) On peut représenter les entiers de 0 à $2^n - 1$.

5) On peut représenter les entiers de -2^{n-1} à $2^{n-1} - 1$.

6) 10011100

7) $11,0101$

8) Les nombres admettant une écriture binaire à virgule fixe sont les nombres qui peuvent s'écrire comme quotient d'une entier naturel par une puissance de deux.

9) $1,1 \times 2^{-4}$

10) La variable de type booléen nommée b prend la valeur $Faux$, la variable de type chaîne de caractères nommée c prend la valeur "$salut$", la variable de type flottant nommé f prend la valeur $9,375$.

11) la valeur de la variable e est doublée.

12)

	valeur de x	valeur de y	valeur de t
Début	a	b	
$t \leftarrow x$	a	b	a
$x \leftarrow y$	b	b	a
$y \leftarrow t$	b	a	a
Fin	b	a	

13)

Entrée: variables réelles x, y et z
Sortie: variable réelle M dont la valeur est égale au maximum des valeurs de x, y et z
Début
  si $x < y$ **alors**
    si $y < z$ **alors**
      $M \leftarrow z$
    sinon
      $M \leftarrow y$
    fin
  sinon
    si $x < z$ **alors**
      $M \leftarrow z$
    sinon
      $M \leftarrow x$
    fin
  fin
Fin

14)

$$\begin{array}{cccccc} & ① & ① & ① & & \\ & & & 1 & 1 & 0 & 1 \\ + & & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ \hline & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}$$

15) On a $r = a_0$ et $q = a_n \times 2^{n-1} + \cdots + a_2 \times 2^1 + a_1 \times 2^0$, on en déduit que $a_0, a_1, \ldots a_n$ sont les restes des divisions successives par 2.

16) L'écriture hexadécimale $4D2$ correspond à l'entier 1234 et l'écriture hexadécimale de l'entier 459 est $1CB$.

17)

$$\begin{array}{cccccccc} & & & ① & ① & ① & ① & \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

18) On remarque que le résultat de l'addition d'un codage et du codage inverse est $\underbrace{11\dots11}_{n\text{ fois}}$ ce qui correspond au codage de l'entier $2^n - 1$.

19) 754.

20)

Début
  $x \leftarrow x + y$
  $y \leftarrow x - y$
  $x \leftarrow x - y$
Fin

21) L'algorithme correspond à la fonction logique ET.

22)

Entrée: variables booléennes x et y
Sortie: variable booléenne z
Début
  si x **alors**
    $z \leftarrow Vrai$
  sinon
    si y **alors**
      $z \leftarrow Vrai$
    sinon
      $z \leftarrow Faux$
    fin
  fin
Fin

23)

x	y	NON(x)	NON(y)	x ET y	NON(x ET y)	NON(x) OU NON(y)
F	F	V	V	F	V	V
F	V	V	F	F	V	V
V	F	F	V	F	V	V
V	V	F	F	V	F	F

x	y	NON(x)	NON(y)	x OU y	NON(x OU y)	NON(x) ET NON(y)
F	F	V	V	F	V	V
F	V	V	F	V	F	F
V	F	F	V	V	F	F
V	V	F	F	V	F	F

24)
- NON(B)⇒NON(A) = NON(NON(B) ET A) = NON(A ET NON(B)) = A⇒B
- (A ET NON(B))⇒NON(A) = NON((A ET NON(B)) ET A) = NON(A ET NON(B)) = A⇒B