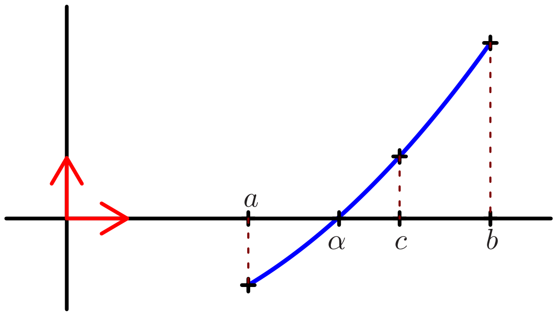
VIII. Calcul approché des zéros d'une fonction

1 Méthode de dichotomie

On rappelle la propriété suivante :

Propriété 1. *On considère une fonction f continue strictement monotone sur l'intervalle $[a;b]$ avec $f(a)f(b) < 0$, alors l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[a;b]$ et pour tout $c \in]a;b[$:*
- *si $f(c) = 0$ alors $\alpha = c$.*
- *si $f(a)f(c) < 0$ alors $\alpha \in]a;c[$.*
- *si $f(c)f(b) < 0$ alors $\alpha \in]c;b[$.*



Afin d'encadrer la racine α de la fonction f sur l'intervalle $[a;b]$, on définit les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_0 & = & a \\ b_0 & = & b \\ a_{n+1} & = & \left\{\begin{array}{cl} a_n & \text{si } f(a_n)f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right) < 0 \\ \frac{a_n+b_n}{2} & \text{sinon} \end{array}\right. \\ b_{n+1} & = & \left\{\begin{array}{cl} \frac{a_n+b_n}{2} & \text{si } f(a_n)f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right) < 0 \\ b_n & \text{sinon} \end{array}\right. \end{array}\right.$$

On effectue le calcul de a_n et b_n au moyen de l'algorithme suivant :

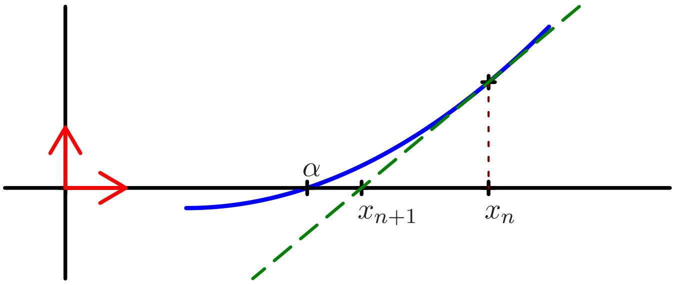
Fonction: dichotomie(f, a, b, n)
Action: Calcul d'un encadrement du zéro de la fonction f sur l'intervalle $[a;b]$ par la méthode de dichotomie en n itérations
Début
  $u \leftarrow a$
  $v \leftarrow b$
  Pour k **allant de** 1 **à** n **faire**
    $w \leftarrow \frac{u+v}{2}$
    Si $f(u)f(w) < 0$ **alors**
      $v \leftarrow w$
    sinon
      $u \leftarrow w$
    FinSi
  FinPour
  Renvoyer u, v
Fin

Exercice 1. *Déterminer* dichotomie$(x \mapsto x^3 - 3, 1, 2, 5)$. *(justifier au moyen d'un tableau indiquant l'évolution des valeurs des variables au fil des itérations)*

Exercice 2. *Montrer que la propriété « en fin d'itération $v - u$ vaut $\frac{b-a}{2^k}$ » est un invariant de boucle, en déduire l'amplitude de l'encadrement obtenu au moyen de la fonction* dichotomie.

2 Méthode de Newton

Définition 1. *La* méthode de Newton *d'approximation d'un zéro α d'une fonction f consiste en la construction d'une suite récurrente $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où x_{n+1} est défini comme l'abscisse du point d'intersection avec l'axe des abscisses de la tangente à la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse x_n.*



Remarque 1. *Il est nécessaire de poser des conditions sur la fonction f pour que la suite de Newton soit bien définie et converge vers α.*

Exercice 3. *On considère la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'approximation d'un zéro α d'une fonction f par la méthode de Newton, exprimer x_{n+1} en fonction de x_n, $f(x_n)$ et $f'(x_n)$.*

Exercice 4. *Calculer le terme x_3 de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'approximation du zéro de la fonction $f : x \mapsto x^3 - 3$ par la méthode de Newton en partant de $x_0 = 1$.*

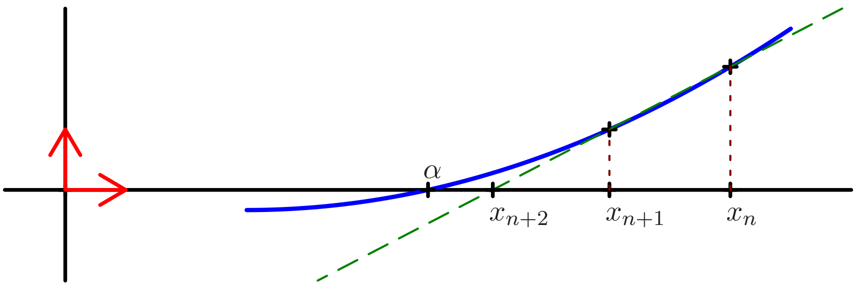
La méthode de Newton ne fournit pas d'encadrement du zéro de la fonction f et la précision de l'approximation n'est donc pas connue. En pratique, on cesse les itérations lorsque la valeur absolue de la différence entre deux termes consécutifs devient inférieure à une valeur donnée.

Exercice 5. *Écrire sous forme d'algorithme une fonction* newton *de paramètres f, Df, a et e calculant successivement les termes de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'approximation d'un zéro de la fonction f de dérivée Df par la méthode de Newton en partant de $x_0 = a$ jusqu'à obtenir une différence des termes consécutifs inférieure à e en valeur absolue et retournant le dernier terme obtenu.*

Remarque 2. *Lorsque la dérivée de la fonction f n'est pas connue, il est possible d'en calculer une approximation au moyen de la formule $f'(a) \underset{\epsilon\to 0}{\simeq} \dfrac{f(a+\epsilon) - f(a)}{\epsilon}$.*

3 Méthode de la sécante

Définition 2. *La* méthode de la sécante *d'approximation d'un zéro α d'une fonction f consiste en la construction d'une suite récurrente $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où x_{n+2} est défini comme l'abscisse du point d'intersection avec l'axe des abscisses de la droite passant par les points de coordonnées $(x_n; f(x_n))$ et $(x_{n+1}; f(x_{n+1}))$.*



Remarque 3. *Il est nécessaire de poser des conditions sur la fonction f pour que la suite soit bien définie et converge vers α.*

Exercice 6. *On considère la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'approximation d'un zéro α d'une fonction f par la méthode de la sécante, exprimer x_{n+2} en fonction de x_n, x_{n+1}, $f(x_n)$ et $f(x_{n+1})$.*

Exercice 7. *Écrire sous forme d'algorithme une fonction* secante *de paramètres f, a, b et e calculant successivement les termes de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'approximation d'un zéro de la fonction f par la méthode de la sécante en partant de $x_0 = a$ et $x_1 = b$ jusqu'à obtenir une différence des termes consécutifs inférieure à e en valeur absolue et retournant le dernier terme obtenu.*

Exercices supplémentaires

Exercice 8. *Écrire sous forme d'algorithme une fonction* dichotomie *de paramètres f, a, b, et n permettant de calculer un encadrement du zéro de la fonction f sur l'intervalle $[a;b]$ avec une amplitude inférieure ou égale à 10^{-n}. Déterminer la classe de complexité temporelle de la fonction* dichotomie.

Exercice 9. *Écrire sous forme d'algorithme une fonction* racine *de paramètre t permettant de calculer une valeur approchée de la racine carrée de la valeur de t au moyen de la méthode de dichotomie avec une précision de* 10 *chiffres après la virgule.*

Exercice 10. *La* méthode de la fausse position *est une modification de la méthode de dichotomie consistant à choisir pour c non pas la valeur $\frac{a+b}{2}$ mais l'abscisse du point d'intersection de la droite passant par les points de coordonnées $(a; f(a))$ et $(b; f(b))$ avec l'axe des abscisses.*

1. *Faire une figure.*
2. *Exprimer c en fonction de a, b et f.*

Exercice 11. *Montrer que la* méthode de la sécante *peut s'obtenir par approximation du nombre dérivé dans la* méthode de Newton.

Réponses

1)

k	w	$f(u)f(w)<0$	u	v
			1	2
1	$1,5$	Vrai	1	$1,5$
2	$1,25$	Faux	$1,25$	$1,5$
3	$1,375$	Faux	$1,375$	$1,5$
4	$1,4375$	Faux	$1,4375$	$1,5$
5	$1,46875$	Vrai	$1,4375$	$1,46875$

2)

valeur de k	valeur de u	valeur de v
i	x	y
$i+1$	x $\frac{x+y}{2}$	$\frac{x+y}{2}$ y

On remarque que $\frac{x+y}{2} - x = y - \frac{x+y}{2} = \frac{y-x}{2}$ ce qui prouve que la propriété est un invariant de boucle, la propriété est vraie pour la première itération et le demeure pour la dernière, l'amplitude de l'encadrement obtenu est donc $\frac{b-a}{2^n}$.

3) On a $\dfrac{f(x_n)-0}{x_n-x_{n+1}} = f'(x_n)$ d'où $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ si $f'(x_n) \neq 0$.

4) On montre que $x_{n+1} = \dfrac{2x_n^3+3}{3x_n^2}$ d'où $x_3 \simeq 1,4428$.

5)

Fonction: newton(f, Df, a, e)
Action: Calcul du dernier terme de la suite d'approximation par la méthode de Newton d'un zéro de la fonction f de dérivée Df de premier terme a avec une différence des deux derniers termes inférieure à e en valeur absolue
Début
- $u \leftarrow a$
- $v \leftarrow a - \dfrac{f(a)}{Df(a)}$
- **TantQue** $|v-u| > e$ **faire**
  - $u \leftarrow v$
  - $v \leftarrow v - \dfrac{f(v)}{Df(v)}$
- **FinTantQue**
- **Renvoyer** v

Fin

6) On a $\dfrac{f(x_n)}{x_n-x_{n+2}} = \dfrac{f(x_{n+1})}{x_{n+1}-x_{n+2}}$ d'où $x_{n+2} = \dfrac{x_nf(x_{n+1}) - x_{n+1}f(x_n)}{f(x_{n+1})-f(x_n)}$.

7)

Fonction: secante(f, a, b, e)
Action: Calcul du dernier terme de la suite d'approximation par la méthode de la sécante d'un zéro de la fonction f de premiers termes a et b avec une différence des deux derniers termes inférieure à e en valeur absolue
Début
- $u \leftarrow a$
- $v \leftarrow b$
- **TantQue** $|v-u| > e$ **faire**
  - $w \leftarrow u$
  - $u \leftarrow v$
  - $v \leftarrow \dfrac{wf(v)-vf(w)}{f(v)-f(w)}$
- **FinTantQue**
- **Renvoyer** v

Fin

8)

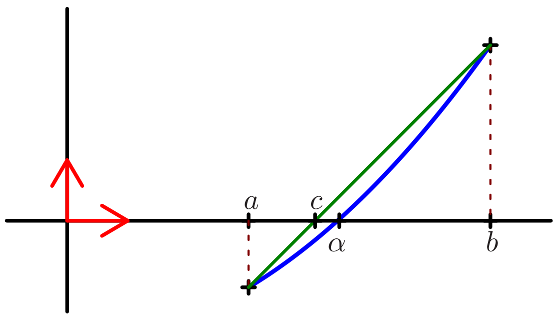
Fonction: dichotomie(f, a, b, n)
Action: Calcul d'un encadrement d'amplitude 10^{-n} du zéro de la fonction f sur l'intervalle $[a; b]$ par la méthode de dichotomie
Début
  $u \leftarrow a$
  $v \leftarrow b$
  TantQue $|v - u| > 10^{-n}$ **faire**
    $w \leftarrow \frac{u+v}{2}$
    Si $f(u)f(w) < 0$ **alors**
      $v \leftarrow w$
    sinon
      $u \leftarrow w$
    FinSi
  FinTantQue
  Renvoyer u, v
Fin

Le nombre d'itérations est le plus petit entier N vérifiant $\dfrac{b-a}{2^N} < 10^{-n}$ donc $N = \lfloor \frac{\ln(b-a)+n\ln 10}{\ln 2} \rfloor + 1$ et la classe de complexité temporelle est $O(n)$.

9) On utilise la fonction $f : x \mapsto x^2 - t$.

Fonction: racine(t)
Action: Calcul d'une valeur approchée de la racine carrée de la valeur de t au moyen de la méthode de dichotomie avec une précision de 10 chiffres après la virgule
Début
  Si $t < 1$ **alors**
    $u \leftarrow t$
    $v \leftarrow 1$
  sinon
    $u \leftarrow 1$
    $v \leftarrow t$
  FinSi
  TantQue $|v - u| > 10^{-10}$ **faire**
    $w \leftarrow \frac{u+v}{2}$
    Si $w^2 > t$ **alors**
      $v \leftarrow w$
    sinon
      $u \leftarrow w$
    FinSi
  FinTantQue
  Renvoyer $\dfrac{u+v}{2}$
Fin

10)



On a $\dfrac{f(a)-0}{a-c} = \dfrac{f(b)-0}{b-c}$ d'où $c = \dfrac{af(b)-bf(a)}{f(b)-f(a)}$.

11) On a $x_{n+2} = x_{n+1} - \dfrac{(x_{n+1}-x_n)f(x_{n+1})}{f(x_{n+1})-f(x_n)}$ ce qui correspond à l'approximation $f'(x_{n+1}) \simeq \dfrac{f(x_{n+1})-f(x_n)}{x_{n+1}-x_n}$ dans la méthode de Newton.