X. Résolution approchée d'une équation différentielle

1 Méthode d'Euler

1.1 Méthode d'Euler pour une équation différentielle du premier ordre

Définition 1. *La* méthode d'Euler *d'approximation de la solution y d'une équation différentielle d'ordre 1 de la variable t avec condition initiale $y(t_0) = y_0$ consiste à construire des approximations successives $(y_0; y'_0), (y_1; y'_1), (y_2; y'_2), \dots, (y_n; y'_n)$ des valeurs du couple $(y; y')$ aux points $t_0, t_1, t_2, \dots, t_n$ selon le schéma suivant :*

- *On écrit l'équation différentielle au point t_k, on remplace $y(t_k)$ par la valeur approchée y_k et $y'(t_k)$ par la valeur approchée y'_k puis on en déduit une expression de y'_k en fonction de t_k et y_k.*
- *On pose $y_{k+1} = y_k + (t_{k+1} - t_k)y'_k$.*

Exercice 1. *On considère l'équation différentielle* $\left\{ \begin{array}{rcl} y' + ty & = & 0 \\ y(t_0) & = & 1 \end{array} \right.$.

1. *Expliciter le schéma d'Euler d'approximation de la solution de cette équation différentielle.*
2. *Écrire une fonction **euler_gaussienne** de paramètre t qui retourne le tableau des valeurs approchées y_k aux points t_k pour $k \in [\![0; \text{longueur}(t) - 1]\!]$.*

Exercice 2. *On considère le système différentiel* $\left\{ \begin{array}{rcr} x' & = & y \\ y' & = & -x \\ x(t_0) & = & 0 \\ y(t_0) & = & 1 \end{array} \right.$.

1. *Expliciter le schéma d'Euler d'approximation de la solution de cette équation différentielle.*
2. *Écrire une fonction **euler_circulaire** de paramètre t qui retourne le tableau des valeurs approchées x_k ainsi que le tableau des valeurs approchées y_k aux points t_k pour $k \in [\![0; \text{longueur}(t) - 1]\!]$.*

Exercice 3.

1. *Écrire une équation différentielle linéaire d'ordre 1 avec condition initiale en $t = 0$ admettant pour solution la fonction exponentielle.*
2. *Expliciter le schéma d'Euler d'approximation de la solution de cette équation différentielle.*
3. *Écrire une fonction **euler_exponentielle** de paramètre n qui retourne le tableau des valeurs approchées y_k aux points $t_k = \frac{k}{n}$ pour $k \in [\![0; n]\!]$.*

1.2 Méthode d'Euler pour une équation différentielle du second ordre

Définition 2. *La* méthode d'Euler *d'approximation de la solution y d'une équation différentielle d'ordre 2 de la variable t avec condition initiale $(y(t_0) = y_0; y'(t_0) = y'_0)$ consiste à construire des approximations successives $(y_0; y'_0; y''_0), (y_1; y'_1; y''_1), (y_2; y'_2; y''_2), \ldots, (y_n; y'_n; y''_n)$ des valeurs du triplet $(y; y'; y'')$ aux points $t_0, t_1, t_2, \ldots, t_n$ selon le schéma suivant :*

- *On écrit l'équation différentielle au point t_k, on remplace $y(t_k)$ par la valeur approchée y_k, $y'(t_k)$ par la valeur approchée y'_k et $y''(t_k)$ par la valeur approchée y''_k puis on en déduit une expression de y''_k en fonction de t_k, y_k et y'_k.*
- *On pose $y_{k+1} = y_k + (t_{k+1} - t_k)y'_k$.*
- *On pose $y'_{k+1} = y'_k + (t_{k+1} - t_k)y''_k$.*

Exercice 4. *On considère l'équation différentielle* $\left\{ \begin{array}{rcl} y'' + ty' + y & = & 0 \\ y(t_0) & = & 1 \\ y'(t_0) & = & 0 \end{array} \right.$.

1. *Expliciter le schéma d'Euler d'approximation de la solution de cette équation différentielle.*
2. *Écrire une fonction **euler_gaussienne** de paramètre t qui retourne le tableau des valeurs approchées y_k aux points t_k pour $k \in [\![0; \text{longueur}(t) - 1]\!]$.*

Exercice 5.

1. *Écrire une équation différentielle linéaire d'ordre 2 avec condition initiale en $t = 0$ admettant pour solution la fonction sinus.*
2. *Expliciter le schéma d'Euler d'approximation de la solution de cette équation différentielle.*
3. *Écrire une fonction **euler_sinus** de paramètre n qui retourne le tableau des valeurs approchées y_k aux points $t_k = \frac{k}{n}$ pour $k \in [\![0; n]\!]$*

2 Méthodes de Runge-Kutta

Définition 3. *Les* méthodes de Runge-Kutta *d'approximation de la solution y d'une équation différentielle d'ordre 1 de la variable t avec condition initiale $y(t_0) = y_0$ consistent à construire des approximations successives $y_1, y_2, \ldots, y_n$ des valeurs de y aux points $t_1, t_2, \ldots, t_n$ au moyen d'une relation de récurrence obtenue par calcul approché de l'intégrale $\displaystyle\int_{t_k}^{t_{k+1}} y'(t)\,\mathrm{d}t = y(t_{k+1}) - y(t_k)$.*

Remarque 1. *La méthode d'Euler est une méthode de Runge-Kutta basée sur la méthode des rectangles.*

Exercice 6. *On considère l'équation différentielle* $\left\{ \begin{array}{rcl} y' + ty & = & 0 \\ y(t_0) & = & 1 \end{array} \right.$.

1. *Montrer que la méthode de Runge-Kutta basée sur la méthode du point milieu conduit à l'approximation $y_{k+1} = y_k + (t_{k+1} - t_k)y'_{k+\frac{1}{2}}$ avec $y'_{k+\frac{1}{2}}$ une valeur approchée de $y'\left(\frac{t_k+t_{k+1}}{2}\right)$.*
2. *Utiliser le schéma d'Euler pour exprimer une valeur approchée $y_{k+\frac{1}{2}}$ de $y\left(\frac{t_k+t_{k+1}}{2}\right)$ en fonction de t_k, t_{k+1} et y_k puis une valeur approchée $y'_{k+\frac{1}{2}}$ de $y'\left(\frac{t_k+t_{k+1}}{2}\right)$ en fonction de t_k, t_{k+1} et $y_{k+\frac{1}{2}}$.*
3. *Écrire une fonction **runge_gaussienne** de paramètre t qui retourne le tableau des valeurs approchées y_k aux points t_k pour $k \in [\![0; \text{longueur}(t) - 1]\!]$.*

Exercices supplémentaires

Exercice 7. *La* méthode d'Euler implicite *d'approximation de la solution y d'une équation différentielle d'ordre 1 de la variable t avec condition initiale $y(t_0) = y_0$ consiste à construire des approximations successives $y_1, y_2, \ldots, y_n$ des valeurs de y aux points $t_1, t_2, \ldots, t_n$ selon le schéma suivant :*

- *On écrit l'équation différentielle au point t_{k+1}, on remplace $y(t_{k+1})$ par la valeur approchée y_{k+1} et $y'(t_{k+1})$ par la valeur approchée y'_{k+1} puis on en déduit une expression de y'_{k+1} en fonction de t_{k+1} et y_{k+1}.*
- *On pose $y_{k+1} = y_k + (t_{k+1} - t_k)y'_{k+1}$.*
- *On en déduit une expression de y_{k+1} en fonction t_k, t_{k+1} et y_k.*

Expliciter le schéma d'Euler implicite d'approximation de la solution de l'équation différentielle $\left\{\begin{array}{rcl} y' + ty & = & 0 \\ y(t_0) & = & 1 \end{array}\right.$.

Exercice 8. *On considère l'équation différentielle* $\left\{\begin{array}{rcl} y' - y^2 & = & 1 \\ y(0) & = & 0 \end{array}\right.$.

1. *Expliciter le schéma d'Euler d'approximation de la solution de cette équation différentielle.*
2. *Écrire une fonction* ***euler_tangente*** *de paramètre n qui retourne le tableau des valeurs approchées y_k aux points $t_k = -1 + \frac{k}{n}$ pour $k \in [\![0; 2n]\!]$*

Exercice 9.

1. *Écrire une équation différentielle linéaire d'ordre 2 avec condition initiale en $t = 0$ admettant pour solution la fonction cosinus.*
2. *Expliciter le schéma d'Euler d'approximation de la solution de cette équation différentielle.*
3. *Écrire une fonction* ***euler_cosinus*** *de paramètre n qui retourne le tableau des valeurs approchées y_k aux points $t_k = \frac{k}{n}$ pour $k \in [\![0; n]\!]$*

Exercice 10. *On considère l'équation différentielle* $\left\{\begin{array}{rcl} y' + ty & = & 0 \\ y(t_0) & = & 1 \end{array}\right.$.

1. *Montrer que la méthode de Runge-Kutta basée sur la méthode des trapèzes conduit à l'approximation $y_{k+1} = y_k + (t_{k+1} - t_k)\dfrac{y'_k + \widetilde{y'_{k+1}}}{2}$ avec $\widetilde{y'_{k+1}}$ une valeur approchée temporaire de $y'(t_{k+1})$.*
2. *Utiliser le schéma d'Euler pour exprimer une valeur approchée temporaire $\widetilde{y_{k+1}}$ de $y(t_{k+1})$ en fonction de t_k, t_{k+1}, y_k et y'_k puis une valeur approchée temporaire $\widetilde{y'_{k+1}}$ de $y'(t_{k+1})$ en fonction de t_k, t_{k+1} et $\widetilde{y_{k+1}}$.*
3. *Écrire une fonction* ***heun_gaussienne*** *de paramètre t qui retourne le tableau des valeurs approchées y_k aux points t_k pour $k \in [\![0; \text{longueur}(t) - 1]\!]$.*

Réponses

1)
- $$\begin{cases} y_0 &= 1 \\ y'_k &= -t_k y_k \\ y_{k+1} &= y_k + (t_{k+1} - t_k) y'_k \end{cases}$$
- **Fonction**: euler_gaussienne(t)
  Action: Approximation de la fonction gaussienne par la méthode d'Euler aux points t_k
  Début
  y **: tableau de taille** longueur(t)
  $y_0 \leftarrow 1$
  Pour k **allant de** 1 **à** longueur(t) -1 **faire**
  $u \leftarrow -t_{k-1} y_{k-1}$
  $y_k \leftarrow y_{k-1} + (t_k - t_{k-1}) u$
  FinPour
  Renvoyer y
  Fin

2)
- $$\begin{cases} x_0 &= 0 \\ y_0 &= 1 \\ x'_k &= y_k \\ y'_k &= -x_k \\ x_{k+1} &= x_k + (t_{k+1} - t_k) x'_k \\ y_{k+1} &= y_k + (t_{k+1} - t_k) y'_k \end{cases}$$
- **Fonction**: euler_circulaire(t)
  Action: Approximation des fonctions circulaires par la méthode d'Euler aux points t_k
  Début
  x **: tableau de taille** longueur(t)
  y **: tableau de taille** longueur(t)
  $x_0 \leftarrow 0$
  $y_0 \leftarrow 1$
  Pour k **allant de** 1 **à** longueur(t) -1 **faire**
  $u \leftarrow y_{k-1}$
  $v \leftarrow -x_{k-1}$
  $x_k \leftarrow x_{k-1} + (t_k - t_{k-1}) u$
  $y_k \leftarrow y_{k-1} + (t_k - t_{k-1}) v$
  FinPour
  Renvoyer x, y
  Fin

3)
- $$\begin{cases} y' &= y \\ y(0) &= 1 \end{cases}$$
- $$\begin{cases} y_0 &= 1 \\ y'_k &= y_k \\ y_{k+1} &= y_k + (t_{k+1} - t_k) y'_k \end{cases}$$
- **Fonction**: euler_exponentielle(n)
  Action: Approximation de la fonction exponentielle par la méthode d'Euler aux points $\frac{k}{n}$ pour $k \in [\![0; n]\!]$
  Début
  y **: tableau de taille** $n+1$
  $y_0 \leftarrow 1$
  Pour k **allant de** 1 **à** n **faire**
  $u \leftarrow y_{k-1}$
  $y_k \leftarrow y_{k-1} + \frac{1}{n} u$
  FinPour
  Renvoyer y
  Fin

4)
- $$\begin{cases} y_0 &= 1 \\ y'_0 &= 0 \\ y''_k &= -y_k - t_k y'_k \\ y_{k+1} &= y_k + (t_{k+1} - t_k) y'_k \\ y'_{k+1} &= y'_k + (t_{k+1} - t_k) y''_k \end{cases}$$

- **Fonction**: euler_gaussienne(t)
  Action: Approximation de la fonction gaussienne par la méthode d'Euler aux points t_k
  Début
  y **: tableau de taille** longueur(t)
  $y_0 \leftarrow 1$
  $u \leftarrow 0$
  Pour k **allant de** 1 **à** longueur(t) $- 1$ **faire**
  $v \leftarrow -y_{k-1} - t_{k-1}u$
  $y_k \leftarrow y_{k-1} + (t_k - t_{k-1})u$
  $u \leftarrow u + (t_k - t_{k-1})v$
  FinPour
  Renvoyer y
  Fin

5)

- $\begin{cases} y'' + y &= 0 \\ y(0) &= 0 \\ y'(0) &= 1 \end{cases}$.
- $\begin{cases} y_0 &= 0 \\ y'_0 &= 1 \\ y''_k &= -y_k \\ y_{k+1} &= y_k + (t_{k+1} - t_k)y'_k \\ y'_{k+1} &= y'_k + (t_{k+1} - t_k)y''_k \end{cases}$
- **Fonction**: euler_sinus(n)
  Action: Approximation de la fonction sinus par la méthode d'Euler aux points $\frac{k}{n}$ pour $k \in [\![0; n]\!]$
  Début
  y **: tableau de taille** $n + 1$
  $y_0 \leftarrow 0$
  $u \leftarrow 1$
  Pour k **allant de** 1 **à** n **faire**
  $v \leftarrow -y_{k-1}$
  $y_k \leftarrow y_{k-1} + \frac{1}{n}u$
  $u \leftarrow u + \frac{1}{n}v$
  FinPour
  Renvoyer y
  Fin

6)

- La méthode du point milieu conduit à l'approximation :
  $y(t_{k+1}) - y(t_k) = \displaystyle\int_{t_k}^{t_{k+1}} y'(t)\,\mathrm{d}t \simeq (t_{k+1} - t_k)y'\left(\frac{t_k + t_{k+1}}{2}\right)$
- $\begin{cases} y_0 &= 0 \\ y'_k &= -t_k y_k \\ y_{k+\frac{1}{2}} &= y_k + \frac{t_{k+1}-t_k}{2}y'_k \\ y'_{k+\frac{1}{2}} &= -\frac{t_k+t_{k+1}}{2}y_{k+\frac{1}{2}} \\ y_{k+1} &= y_k + (t_{k+1} - t_k)y'_{k+\frac{1}{2}} \end{cases}$
- **Fonction**: runge_gaussienne(t)
  Action: Approximation de la fonction gaussienne par la méthode de Runge aux points t_k
  Début
  y **: tableau de taille** longueur(t)
  $y_0 \leftarrow 1$
  Pour k **allant de** 1 **à** longueur(t) $- 1$ **faire**
  $u \leftarrow -t_{k-1}y_{k-1}$
  $v \leftarrow y_{k-1} + \frac{t_k-t_{k-1}}{2}u$
  $w \leftarrow -\frac{t_{k-1}+t_k}{2}v$
  $y_k \leftarrow y_{k-1} + (t_k - t_{k-1})w$
  FinPour
  Renvoyer y
  Fin

7) $\begin{cases} y_0 &= 1 \\ y_{k+1} &= \frac{y_k}{1+(t_{k+1}-t_k)t_{k+1}} \end{cases}$

8) • $\begin{cases} y_0 &= 1 \\ y'_k &= 1+y_k^2 \\ y_{k+1} &= y_k + (t_{k+1}-t_k)y'_k \end{cases}$

•

Fonction: euler_tangente(n)
Action: Approximation de la fonction tangente par la méthode d'Euler aux points $-1+\frac{k}{n}$ pour $k \in [\![0;2n]\!]$
Début
  y **: tableau de taille** $2n+1$
  $y_n \leftarrow 0$
  Pour k **allant de** 1 **à** n **faire**
    $u \leftarrow 1 + y_{n+k-1}^2$
    $y_{n+k} \leftarrow y_{n+k-1} + \frac{1}{n}u$
  FinPour
  Pour k **allant de** 1 **à** n **faire**
    $u \leftarrow 1 + y_{n-k+1}^2$
    $y_{n-k} \leftarrow y_{n-k+1} - \frac{1}{n}u$
  FinPour
  Renvoyer y
Fin

9) • $\begin{cases} y''+y &= 0 \\ y(0) &= 1 \\ y'(0) &= 0 \end{cases}$.

• $\begin{cases} y_0 &= 1 \\ y'_0 &= 0 \\ y''_k &= -y_k \\ y_{k+1} &= y_k + (t_{k+1}-t_k)y'_k \\ y'_{k+1} &= y'_k + (t_{k+1}-t_k)y''_k \end{cases}$

•

Fonction: euler_cosinus(n)
Action: Approximation de la fonction cosinus par la méthode d'Euler aux points $\frac{k}{n}$ pour $k \in [\![0;n]\!]$
Début
  y **: tableau de taille** $n+1$
  $y_0 \leftarrow 1$
  $u \leftarrow 0$
  Pour k **allant de** 1 **à** n **faire**
    $v \leftarrow -y_{k-1}$
    $y_k \leftarrow y_{k-1} + \frac{1}{n}u$
    $u \leftarrow u + \frac{1}{n}v$
  FinPour
  Renvoyer y
Fin

10) • La méthode des trapèzes conduit à l'approximation :

$$y(t_{k+1}) - y(t_k) = \int_{t_k}^{t_{k+1}} y'(t)\,\mathrm{d}t \simeq (t_{k+1}-t_k)\frac{y'(t_k)+y'(t_{k+1})}{2}$$

• $\begin{cases} y_0 &= 0 \\ y'_k &= -t_k y_k \\ \widetilde{y_{k+1}} &= y_k + (t_{k+1}-t_k)y'_k \\ \widetilde{y'_{k+1}} &= -t_{k+1}\widetilde{y_{k+1}} \\ y_{k+1} &= y_k + (t_{k+1}-t_k)\frac{y'_k+\widetilde{y'_{k+1}}}{2} \end{cases}$

•

Fonction: heun_gaussienne(t)
Action: Approximation de la fonction gaussienne par la méthode de Heun aux points t_k
Début
  y **: tableau de taille** longueur(t)
  $y_0 \leftarrow 1$
  Pour k **allant de** 1 **à** longueur(t) -1 **faire**
    $u \leftarrow -t_{k-1}y_{k-1}$
    $v \leftarrow y_{k-1} + (t_k - t_{k-1})u$
    $w \leftarrow -t_k v$
    $y_k \leftarrow y_{k-1} + (t_k - t_{k-1})\frac{u+w}{2}$
  FinPour
  Renvoyer y
Fin