

Correction du devoir maison de mathématiques n°1

Exercice 1

$$\begin{aligned}x^2 - 4x + 7 &= (x - 2)^2 - 4 + 7 = (x - 2)^2 + 3 \\x^2 - 2x - 6 &= (x - 1)^2 - 1 - 6 = (x - 1)^2 + (-7) \\x^2 + 3x + 2 &= (x + \frac{3}{2})^2 - \frac{9}{4} + 2 = (x - (-\frac{3}{2}))^2 + (-\frac{1}{4}) \\2x^2 - 20x + 59 &= 2[x^2 - 10x + \frac{59}{2}] = 2[(x - 5)^2 - 25 + \frac{59}{2}] \\&= 2[(x - 5)^2 + \frac{9}{2}] = 2(x - 5)^2 + 9 \\3x^2 + 4x + 7 &= 3[x^2 + \frac{4}{3}x + \frac{7}{3}] = 3[(x + \frac{2}{3})^2 - \frac{4}{9} + \frac{7}{3}] \\&= 3[(x + \frac{2}{3})^2 + \frac{17}{9}] = 3(x - (-\frac{2}{3}))^2 + \frac{17}{3}\end{aligned}$$

Exercice 2

$$\begin{aligned}x^2 + 6x + 9 &= (x + 3)^2 \\x^2 + x - 2 &= (x + \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} - 2 = (x + \frac{1}{2})^2 - \frac{9}{4} \\&= (x + \frac{1}{2})^2 - (\frac{3}{2})^2 = (x + \frac{1}{2} + \frac{3}{2})(x + \frac{1}{2} - \frac{3}{2}) \\&= (x + 2)(x - 1) \\2x^2 - 10x + 12 &= 2[x^2 - 5x + 6] = 2[(x - \frac{5}{2})^2 - \frac{25}{4} + 6] \\&= 2[(x - \frac{5}{2})^2 - (\frac{1}{2})^2] = 2(x - \frac{5}{2} + \frac{1}{2})(x - \frac{5}{2} - \frac{1}{2}) \\&= 2(x - 2)(x - 3) \\3x^2 + 13x + 4 &= 3[x^2 + \frac{13}{3}x + \frac{4}{3}] = 3[(x + \frac{13}{6})^2 - \frac{169}{36} + \frac{4}{3}] \\&= 3[(x + \frac{13}{6})^2 - \frac{121}{36}] = 3[(x + \frac{13}{6})^2 - (\frac{11}{6})^2] \\&= 3(x + \frac{13}{6} + \frac{11}{6})(x + \frac{13}{6} - \frac{11}{6}) = 3(x + 4)(x + \frac{1}{3})\end{aligned}$$

Exercice 3

1).

$$\begin{aligned} f_1(x) &= x^2 - x - 6 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} - 6 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} \\ &= \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \left(x - \frac{1}{2} + \frac{5}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2} - \frac{5}{2}\right) = (x+2)(x-3) \end{aligned}$$

x	$-\infty$	-2	3	$+\infty$
$(x+2)$	$-$	0	$+$	$+$
$(x-3)$	$-$	$+$	0	$+$
$f_1(x)$	$+$	0	$-$	0

2).

$$f_2(x) = x^2 + 2x + 8 = (x+1)^2 - 1 + 8 = (x-1)^2 + 7$$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f_2(x)$	$+$	

3).

$$\begin{aligned} f_3(x) &= 2x^2 + 4x - 6 = 2[x^2 + 2x - 3] = 2[(x+1)^2 - 1 - 3] \\ &= 2[(x+1)^2 - 4] = 2[(x+1)^2 - (2)^2] = 2(x+1+2)(x+1-2) \\ &= 2(x+3)(x-1) \end{aligned}$$

x	$-\infty$	-3	1	$+\infty$
$(x+3)$	$-$	0	$+$	$+$
$(x-1)$	$-$	$+$	0	$+$
$f_3(x)$	$+$	0	$-$	0

4).

$$\begin{aligned} f_4(x) &= -2x^2 - 5x + 3 = -2\left[x^2 + \frac{5}{2}x - \frac{3}{2}\right] = -2\left[\left(x + \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{25}{16} - \frac{3}{2}\right] \\ &= -2\left[\left(x + \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{49}{16}\right] = -2\left[\left(x + \frac{5}{4}\right)^2 - \left(\frac{7}{4}\right)^2\right] = -2\left(x + \frac{5}{4} + \frac{7}{4}\right)\left(x + \frac{5}{4} - \frac{7}{4}\right) \\ &= -2(x+3)\left(x - \frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

x	$-\infty$	-3	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$(x+3)$	$-$	0	$+$	$+$
$\left(x - \frac{1}{2}\right)$	$-$	$+$	0	$+$
$(x+3)\left(x - \frac{1}{2}\right)$	$+$	0	$-$	0
$f_4(x)$	$-$	0	$+$	0

Exercice 41). On calcule le discriminant du trinôme $x^2 + x - 6$.

$$\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times (-6) = 25 > 0$$

Le trinôme possède deux racines :

$$x_1 = \frac{-1 + \sqrt{25}}{2 \times 1} = 2 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-1 - \sqrt{25}}{2 \times 1} = -3$$

L'équation $x^2 + x - 6 = 0$ admet pour ensemble solution $S = \{-3; 2\}$.

2). On remarque tout d'abord que l'équation peut se mettre sous la forme :

$$2x^2 + 7x + 6 = 0$$

On calcule ensuite le discriminant du trinôme $2x^2 + 7x + 6$.

$$\Delta = 7^2 - 4 \times 2 \times 6 = 1 > 0$$

Le trinôme possède deux racines :

$$x_1 = \frac{-7 + \sqrt{1}}{2 \times 2} = -\frac{3}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-7 - \sqrt{1}}{2 \times 2} = -2$$

L'équation $2x^2 + 7x = -6$ admet pour ensemble solution $S = \{-2; -\frac{3}{2}\}$.

3). On calcule le discriminant du trinôme $x^2 + 2x - 3$.

$$\Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times (-3) = 16 > 0$$

Le trinôme possède deux racines :

$$x_1 = \frac{-2 + \sqrt{16}}{2 \times 1} = 1 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-2 - \sqrt{16}}{2 \times 1} = -3$$

Le trinôme est du signe de $a = 1$ donc positif à l'extérieur des racines, l'inéquation $x^2 + 2x - 3 \geq 0$ admet pour ensemble solution $S =]-\infty; -3] \cup [1; +\infty[$.

4). On remarque tout d'abord que l'équation peut se mettre sous la forme :

$$x^2 + 5x - 14 \leq 0$$

On calcule ensuite le discriminant du trinôme $x^2 + 5x - 14$.

$$\Delta = 5^2 - 4 \times - \times (-14) = 81 > 0$$

Le trinôme possède deux racines :

$$x_1 = \frac{-5 + \sqrt{81}}{2 \times 1} = 2 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-5 - \sqrt{81}}{2 \times 1} = -7$$

Le trinôme est du signe contraire de $a = 1$ donc négatif à l'intérieur des racines, l'inéquation $x^2 + 5x \leq 14$ admet pour ensemble solution $S = [-7; 2]$.

5). On calcule le discriminant du trinôme $2x^2 - 13x + 7$.

$$\Delta = (-13)^2 - 4 \times 2 \times 7 = 113 > 0$$

Le trinôme possède deux racines :

$$x_1 = \frac{-(-13) + \sqrt{113}}{2 \times 2} = \frac{13 + \sqrt{113}}{4} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-(-13) - \sqrt{113}}{2 \times 2} = \frac{13 - \sqrt{113}}{4}$$

Le trinôme est du signe contraire de $a = 2$ donc négatif à l'intérieur des racines, l'inéquation $2x^2 - 13x + 7 \leq 0$ admet pour ensemble solution $S = [\frac{13 - \sqrt{113}}{4}; \frac{13 + \sqrt{113}}{4}]$.

Exercice 5

- 1). On cherche la forme canonique du trinôme
- $y = 2x^2 - 4x + 9$
- .

$$y = 2\left[x^2 - 2x + \frac{9}{2}\right] = 2\left[(x-1)^2 - 1 + \frac{9}{2}\right] = 2\left[(x-1)^2 + \frac{7}{2}\right] = 2(x-1)^2 + 7$$

Le sommet S de la parabole d'équation $y = 2x^2 - 4x + 9$ a pour coordonnées $S(1; 7)$.

- 2). Le sommet de la parabole a pour coordonnées
- $(1; 3)$
- donc son équation est de la forme :

$$y = a(x-1)^2 + 3$$

Le point $M(2; 5)$ appartient à la parabole donc $5 = a(2-1)^2 + 3$ d'où $a = 2$.

L'équation de la parabole est donc $y = 2(x-1)^2 + 3$.

- 3). La parabole coupe l'axe des abscisses en
- $A(-5; 0)$
- et
- $B(3; 0)$
- donc son équation est de la forme :

$$y = a(x - (-5))(x - 3) = a(x + 5)(x - 3)$$

Le point $C(1; -24)$ appartient à la parabole donc $-24 = a(1 + 5)(1 - 3)$ d'où $a = 2$.

L'équation de la parabole est donc $y = 2(x + 5)(x - 3)$.

Exercice 6*

- 1). On commence par factoriser si possible les deux trinômes, l'inéquation peut alors se mettre sous la forme suivante :

$$\frac{(x-1)^2 + 2}{(x+2)(x-1)} \geq 0$$

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$
$(x-1)^2 + 2$	+		+	+
$(x+2)$	-	0	+	+
$(x-1)$	-		-	0
$\frac{(x-1)^2 + 2}{(x+2)(x-1)}$	+		-	

L'ensemble des solutions de l'inéquation est $S =]-\infty; -2[\cup]1; +\infty[$.

- 2). L'inéquation peut se mettre sous la forme :

$$\frac{x-1}{2x} - \frac{x+5}{2-x} > 0$$

soit après réduction au même dénominateur :

$$\frac{-3x^2 - 7x - 2}{2x(2-x)} > 0$$

et après factorisation du numérateur :

$$\frac{-3(x+2)\left(x + \frac{1}{3}\right)}{2x(2-x)} > 0$$

x	$-\infty$	-2	$-\frac{1}{3}$	0	2	$+\infty$
$(x+2)$		-	0	+	+	+
$(x+\frac{1}{3})$		-	-	0	+	+
$2x$		-	-	-	0	+
$2-x$		+	+	+	+	0
$\frac{-3(x+2)(x+\frac{1}{3})}{2x(2-x)}$		+	0	-	0	+

L'ensemble des solutions de l'inéquation est $S =]-\infty; -2[\cup]-\frac{1}{3}; 0[\cup]2; +\infty[$.

Exercice 7*

L'équation $-3x^2 + 6x - 4m = 0$ admet une unique solution si et seulement si le discriminant du trinôme $-3x^2 + 6x - 4m$ est égal à 0.

$$\Delta = 6^2 - 4 \times (-3) \times (-4m) = 36 - 48m$$

Donc $\Delta = 0$ si et seulement si $m = \frac{36}{48} = \frac{3}{4}$, l'équation devient alors :

$$-3x^2 + 6x - 3 = 0 \text{ soit } -3(x-1)^2 = 0$$

Cette équation admet pour unique solution $x = 1$.

Exercice 8**

On résout le système par la méthode de substitution en remarquant que $y = \frac{60}{x}$. On obtient alors :

$$\frac{1}{x} + \frac{x}{60} = \frac{4}{15} \text{ soit } \frac{1}{x} + \frac{x}{60} - \frac{4}{15} = 0 \text{ soit } \frac{x^2 - 16x + 60}{60x} = 0$$

On résout l'équation $x^2 - 16x + 60 = 0$ à l'aide du discriminant et on obtient deux solutions :

$$x_1 = \frac{-(-16) + \sqrt{16}}{2 \times 1} = 10 \text{ et } x_2 = \frac{-(-16) - \sqrt{16}}{2 \times 1} = 6$$

On a alors $y_1 = \frac{60}{x_1} = 6$ et $y_2 = \frac{60}{x_2} = 10$.

Les solutions du système sont les couples $(x_1 = 10; y_1 = 6)$ et $(x_2 = 6; y_2 = 10)$.

Exercice 9**

1). On a $x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$, d'où :

$$x_1 + x_2 = \frac{(-b + \sqrt{\Delta}) + (-b - \sqrt{\Delta})}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}$$

et :

$$x_1 \times x_2 = \frac{(-b + \sqrt{\Delta})(-b - \sqrt{\Delta})}{(2a)^2} = \frac{(-b)^2 - (\sqrt{\Delta})^2}{4a^2} = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

- 2). Dans le cas de l'équation $2x^2 + 14x - 17 = 0$, le discriminant étant positif, il existe deux solutions x_1 et x_2 avec :

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{14}{2} = -7 \quad \text{et} \quad x_1x_2 = \frac{c}{a} = -\frac{17}{2}$$

- 3). On cherche deux nombres x_1 et x_2 avec $x_1 + x_2 = 27$ et $x_1x_2 = 180$. Ils sont solutions de l'équation $(x - x_1)(x - x_2) = 0$, équation de degré deux qui peut se mettre sous la forme $ax^2 + bx + c = 0$. Alors d'après la première question $-\frac{b}{a} = 27$ et $\frac{c}{a} = 180$. Comme $a = 1$, on obtient $b = -27$ et $c = 180$.

On résout alors l'équation $x^2 - 27x + 180 = 0$. Ses solutions sont :

$$x_1 = \frac{-(-27) + \sqrt{9}}{2 \times 1} = 15 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-(-27) - \sqrt{9}}{2 \times 1} = 12$$

Les nombres 12 et 15 sont bien solutions du problème car $12 + 15 = 27$ et $12 \times 15 = 180$.

Exercice 10***

On remarque que $x_1 = 1$ est une racine évidente, on cherche alors une factorisation sous la forme :

$$x^3 + 3x^2 - 81x + 77 = (x - 1)(ax^2 + bx + c)$$

on obtient :

$$x^3 + 3x^2 - 81x + 77 = (x - 1)(x^2 + 4x - 77)$$

Après étude des racines du trinôme, on obtient deux nouvelles solutions de l'équation :

$$x_2 = \frac{-4 + \sqrt{324}}{2 \times 1} = 7 \quad \text{et} \quad x_3 = \frac{-4 - \sqrt{324}}{2 \times 1} = -11$$