Correction du devoir maison de mathématiques n°1

Exercice 1

$$\begin{array}{rcl} x^2-4x+7 &=& (x-2)^2-4+7 &=& (x-2)^2+3 \\ x^2-2x-6 &=& (x-1)^2-1-6 &=& (x-1)^2+(-7) \\ x^2+3x+2 &=& (x+\frac{3}{2})^2-\frac{9}{4}+2 &=& (x-(-\frac{3}{2}))^2+(-\frac{1}{4}) \\ 2x^2-20x+59 &=& 2[x^2-10x+\frac{59}{2}] &=& 2[(x-5)^2-25+\frac{59}{2}] \\ &=& 2[(x-5)^2+\frac{9}{2}] &=& 2(x-5)^2+9 \\ 3x^2+4x+7 &=& 3[x^2+\frac{4}{3}x+\frac{7}{3}] &=& 3[(x+\frac{2}{3})^2-\frac{4}{9}+\frac{7}{3}] \\ &=& 3[(x+\frac{2}{3})^2+\frac{17}{9}] &=& 3(x-(-\frac{2}{3}))^2+\frac{17}{3} \end{array}$$

Exercice 2

$$\begin{array}{rcccl} x^2+6x+9 &=& (x+3)^2 && \\ x^2+x-2 &=& (x+\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}-2 &=& (x+\frac{1}{2})^2-\frac{9}{4} \\ &=& (x+\frac{1}{2})^2-(\frac{3}{2})^2 &=& (x+\frac{1}{2}+\frac{3}{2})(x+\frac{1}{2}-\frac{3}{2}) \\ &=& (x+2)(x-1) && \\ 2x^2-10x+12 &=& 2[x^2-5x+6] &=& 2[(x-\frac{5}{2})^2-\frac{25}{4}+6] \\ &=& 2[(x-\frac{5}{2})^2-(\frac{1}{2})^2] &=& 2(x-\frac{5}{2}+\frac{1}{2})(x-\frac{5}{2}-\frac{1}{2}) \\ &=& 2(x-2)(x-3) && \\ 3x^2+13x+4 &=& 3[x^2+\frac{13}{3}x+\frac{4}{3}] &=& 3[(x+\frac{13}{6})^2-\frac{169}{36}+\frac{4}{3}] \\ &=& 3[(x+\frac{13}{6})^2-\frac{121}{36}] &=& 3[(x+\frac{13}{6})^2-(\frac{11}{6})^2] \\ &=& 3(x+\frac{13}{6}+\frac{11}{6})(x+\frac{13}{6}-\frac{11}{6}) &=& 3(x+4)(x+\frac{1}{3}) \end{array}$$

Exercice 3

1).

$$\begin{aligned} f_1(x) &= x^2 - x - 6 = (x-\tfrac{1}{2})^2 - \tfrac{1}{4} - 6 = (x-\tfrac{1}{2})^2 - \tfrac{25}{4} \\ &= (x-\tfrac{1}{2})^2 - (\tfrac{5}{2})^2 = (x-\tfrac{1}{2}+\tfrac{5}{2})(x-\tfrac{1}{2}-\tfrac{5}{2}) = (x+2)(x-3) \end{aligned}$$

x	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
$(x+2)$		$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	
$(x-3)$		$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	
$f_1(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

2).

$$f_2(x) = x^2 + 2x + 8 = (x+1)^2 - 1 + 8 = (x-1)^2 + 7$$

x	$-\infty$		$+\infty$
$f_2(x)$		$+$	

3).

$$\begin{aligned} f_3(x) &= 2x^2 + 4x - 6 = 2[x^2 + 2x - 3] = 2[(x+1)^2 - 1 - 3] \\ &= 2[(x+1)^2 - 4] = 2[(x+1)^2 - (2)^2] = 2(x+1+2)(x+1-2) \\ &= 2(x+3)(x-1) \end{aligned}$$

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
$(x+3)$		$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	
$(x-1)$		$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	
$f_3(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

4).

$$\begin{aligned} f_4(x) &= -2x^2 - 5x + 3 = -2[x^2 + \tfrac{5}{2}x - \tfrac{3}{2}] = -2[(x+\tfrac{5}{4})^2 - \tfrac{25}{16} - \tfrac{3}{2}] \\ &= -2[(x+\tfrac{5}{4})^2 - \tfrac{49}{16}] = -2[(x+\tfrac{5}{4})^2 - (\tfrac{7}{4})^2] = -2(x+\tfrac{5}{4}+\tfrac{7}{4})(x+\tfrac{5}{4}-\tfrac{7}{4}) \\ &= -2(x+3)(x-\tfrac{1}{2}) \end{aligned}$$

x	$-\infty$		-3		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$(x+3)$		$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	
$(x-\frac{1}{2})$		$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	
$(x+3)(x-\frac{1}{2})$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f_4(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Exercice 4

1). On calcule le discriminant du trinôme $x^2 + x - 6$.

$$\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times (-6) = 25 > 0$$

Le trinôme possède deux racines :

$$x_1 = \frac{-1+\sqrt{25}}{2 \times 1} = 2 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-1-\sqrt{25}}{2 \times 1} = -3$$

L'équation $x^2 + x - 6 = 0$ admet pour ensemble solution $S = \{-3; 2\}$.

2). On remarque tout d'abord que l'équation peut se mettre sous la forme :

$$2x^2 + 7x + 6 = 0$$

On calcule ensuite le discriminant du trinôme $2x^2 + 7x + 6$.

$$\Delta = 7^2 - 4 \times 2 \times 6 = 1 > 0$$

Le trinôme possède deux racines :

$$x_1 = \frac{-7 + \sqrt{1}}{2 \times 2} = -\frac{3}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-7 - \sqrt{1}}{2 \times 2} = -2$$

L'équation $2x^2 + 7x = -6$ admet pour ensemble solution $S = \{-2; -\frac{3}{2}\}$.

3). On calcule le discriminant du trinôme $x^2 + 2x - 3$.

$$\Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times (-3) = 16 > 0$$

Le trinôme possède deux racines :

$$x_1 = \frac{-2 + \sqrt{16}}{2 \times 1} = 1 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-2 - \sqrt{16}}{2 \times 1} = -3$$

Le trinôme est du signe de $a = 1$ donc positif à l'extérieur des racines, l'inéquation $x^2 + 2x - 3 \geqslant 0$ admet pour ensemble solution $S =]-\infty; -3] \cup [1; +\infty[$.

4). On remarque tout d'abord que l'équation peut se mettre sous la forme :

$$x^2 + 5x - 14 \leqslant 0$$

On calcule ensuite le discriminant du trinôme $x^2 + 5x - 14$.

$$\Delta = 5^2 - 4 \times - \times (-14) = 81 > 0$$

Le trinôme possède deux racines :

$$x_1 = \frac{-5 + \sqrt{81}}{2 \times 1} = 2 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-5 - \sqrt{81}}{2 \times 1} = -7$$

Le trinôme est du signe contraire de $a = 1$ donc négatif à l'intérieur des racines, l'inéquation $x^2 + 5x \leqslant 14$ admet pour ensemble solution $S = [-7; 2]$.

5). On calcule le discriminant du trinôme $2x^2 - 13x + 7$.

$$\Delta = (-13)^2 - 4 \times 2 \times 7 = 113 > 0$$

Le trinôme possède deux racines :

$$x_1 = \frac{-(-13) + \sqrt{113}}{2 \times 2} = \frac{13 + \sqrt{113}}{4} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-(-13) - \sqrt{113}}{2 \times 2} = \frac{13 - \sqrt{113}}{4}$$

Le trinôme est du signe contraire de $a = 2$ donc négatif à l'intérieur des racines, l'inéquation $2x^2 - 13x + 7 \leqslant 0$ admet pour ensemble solution $S = [\frac{13-\sqrt{113}}{4}; \frac{13+\sqrt{113}}{4}]$.

Exercice 5

1). On cherche la forme canonique du trinôme $y = 2x^2 - 4x + 9$.

$$y = 2[x^2 - 2x + \frac{9}{2}] = 2[(x-1)^2 - 1 + \frac{9}{2}] = 2[(x-1)^2 + \frac{7}{2}] = 2(x-1)^2 + 7$$

Le sommet S de la parabole d'équation $y = 2x^2 - 4x + 9$ a pour coordonnées $S(1;7)$.

2). Le sommet de la parabole a pour coordonnées $(1;3)$ donc son équation est de la forme :

$$y = a(x-1)^2 + 3$$

Le point $M(2;5)$ appartient à la parabole donc $5 = a(2-1)^2 + 3$ d'où $a = 2$.

L'équation de la parabole est donc $y = 2(x-1)^2 + 3$.

3). La parabole coupe l'axe des abscisses en $A(-5;0)$ et $B(3;0)$ donc son équation est de la forme :

$$y = a(x - (-5))(x-3) = a(x+5)(x-3)$$

Le point $C(1;-24)$ appartient à la parabole donc $-24 = a(1+5)(1-3)$ d'où $a = 2$.

L'équation de la parabole est donc $y = 2(x+5)(x-3)$.

Exercice 6*

1). On commence par factoriser si possible les deux trinômes, l'inéquation peut alors se mettre sous la forme suivante :

$$\frac{(x-1)^2 + 2}{(x+2)(x-1)} \geqslant 0$$

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$(x-1)^2+2$		$+$	$\vert$	$+$	$\vert$	$+$	
$(x+2)$		$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	
$(x-1)$		$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	
$\frac{(x-1)^2+2}{(x+2)(x-1)}$		$+$	$\Vert$	$-$	$\Vert$	$+$	

L'ensemble des solutions de l'inéquation est $S =]-\infty;-2[\cup]1;+\infty[$.

2). L'inéquation peut se mettre sous la forme :

$$\frac{x-1}{2x} - \frac{x+5}{2-x} > 0$$

soit après réduction au même dénominateur :

$$\frac{-3x^2 - 7x - 2}{2x(2-x)} > 0$$

et après factorisation du numérateur :

$$\frac{-3(x+2)(x+\frac{1}{3})}{2x(2-x)} > 0$$

x	$-\infty$		-2		$-\frac{1}{3}$		0		2		$+\infty$
$(x+2)$		$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	$\vert$	$+$	$\vert$	$+$	
$(x+\frac{1}{3})$		$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	$\vert$	$+$	
$2x$		$-$	$\vert$	$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	
$2-x$		$+$	$\vert$	$+$	$\vert$	$+$	$\vert$	$+$	0	$-$	
$\frac{-3(x+2)(x+\frac{1}{3})}{2x(2-x)}$		$+$	0	$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	$\Vert$	$+$	

L'ensemble des solutions de l'inéquation est $S =]-\infty; -2[\cup]-\frac{1}{3}; 0[\cup]2; +\infty[$.

Exercice 7*

L'équation $-3x^2+6x-4m=0$ admet une unique solution si et seulement si le discriminant du trinôme $-3x^2+6x-4m$ est égal à 0.

$$\Delta = 6^2 - 4\times(-3)\times(-4m) = 36-48m$$

Donc $\Delta = 0$ si et seulement si $m = \frac{36}{48} = \frac{3}{4}$, l'équation devient alors :

$$-3x^2+6x-3=0 \text{ soit } -3(x-1)^2=0$$

Cette équation admet pour unique solution $x=1$.

Exercice 8**

On résout le système par la méthode de substitution en remarquant que $y = \frac{60}{x}$. On obtient alors :

$$\frac{1}{x}+\frac{x}{60}=\frac{4}{15} \text{ soit } \frac{1}{x}+\frac{x}{60}-\frac{4}{15}=0 \text{ soit } \frac{x^2-16x+60}{60x}=0$$

On résout l'équation $x^2-16x+60=0$ à l'aide du discriminant et on obtient deux solutions :

$$x_1 = \frac{-(-16)+\sqrt{16}}{2\times 1} = 10 \text{ et } x_2 = \frac{-(-16)-\sqrt{16}}{2\times 1} = 6$$

On a alors $y_1 = \frac{60}{x_1} = 6$ et $y_2 = \frac{60}{x_2} = 10$.

Les solutions du système sont les couples $(x_1 = 10; y_1 = 6)$ et $(x_2 = 6; y_2 = 10)$.

Exercice 9**

1). On a $x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$, d'où :

$$x_1+x_2 = \frac{(-b+\sqrt{\Delta})+(-b-\sqrt{\Delta})}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}$$

et :

$$x_1\times x_2 = \frac{(-b+\sqrt{\Delta})(-b-\sqrt{\Delta})}{(2a)^2} = \frac{(-b)^2-(\sqrt{\Delta})^2}{4a^2} = \frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

2). Dans le cas de l'équation $2x^2 + 14x - 17 = 0$, le discriminant étant positif, il existe deux solutions x_1 et x_2 avec :

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{14}{2} = -7 \quad \text{et} \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a} = -\frac{17}{2}$$

3). On cherche deux nombres x_1 et x_2 avec $x_1 + x_2 = 27$ et $x_1 x_2 = 180$. Ils sont solutions de l'équation $(x - x_1)(x - x_2) = 0$, équation de degré deux qui peut se mettre sous la forme $ax^2 + bx + c = 0$. Alors d'après la première question $-\frac{b}{a} = 27$ et $\frac{c}{a} = 180$. Comme $a = 1$, on obtient $b = -27$ et $c = 180$.

On résout alors l'équation $x^2 - 27x + 180 = 0$. Ses solutions sont :

$$x_1 = \frac{-(-27) + \sqrt{9}}{2 \times 1} = 15 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-(-27) - \sqrt{9}}{2 \times 1} = 12$$

Les nombres 12 et 15 sont bien solutions du problème car $12 + 15 = 27$ et $12 \times 15 = 180$.

Exercice 10***

On remarque que $x_1 = 1$ est une racine évidente, on cherche alors une factorisation sous la forme :

$$x^3 + 3x^2 - 81x + 77 = (x - 1)(ax^2 + bx + c)$$

on obtient :

$$x^3 + 3x^2 - 81x + 77 = (x - 1)(x^2 + 4x - 77)$$

Après étude des racines du trinôme, on obtient deux nouvelles solutions de l'équation :

$$x_2 = \frac{-4 + \sqrt{324}}{2 \times 1} = 7 \quad \text{et} \quad x_3 = \frac{-4 - \sqrt{324}}{2 \times 1} = -11$$