Correction du devoir surveillé de mathématiques n°1

Exercice 1

$$\begin{array}{rclcl}
x^2-4x+5 &=& (x-2)^2-4+5 &=& (x-2)^2+1 \\
x^2+8x+15 &=& (x+4)^2-16+15 &=& (x-(-4))^2+(-1) \\
x^2-3x+1 &=& (x-\frac{3}{2})^2-\frac{9}{4}+1 &=& (x-\frac{3}{2})^2+(-\frac{5}{4}) \\
2x^2+10x-5 &=& 2[x^2+5x-\frac{5}{2}] &=& 2[(x+\frac{5}{2})^2-\frac{25}{4}-\frac{5}{2}] \\
&=& 2[(x+\frac{5}{2})^2-\frac{35}{4}] &=& 2(x-(-\frac{5}{2}))^2+(-\frac{35}{2}) \\
3x^2-7x+2 &=& 3[x^2-\frac{7}{3}x+\frac{2}{3}] &=& 3[(x-\frac{7}{6})^2-\frac{49}{36}+\frac{2}{3}] \\
&=& 3[(x-\frac{7}{6})^2-\frac{25}{36}] &=& 3(x-\frac{7}{6})^2+(-\frac{25}{12})
\end{array}$$

Exercice 2

$$\begin{array}{rclcl}
x^2-2x-3 &=& (x-1)^2-1-3 &=& (x-1)^2-(2)^2 \\
&=& (x-1+2)(x-1-2) &=& (x+1)(x-3) \\
2x^2+2x-12 &=& 2[x^2+x-6] &=& 2[(x+\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}-6] \\
&=& 2[(x+\frac{1}{2})^2-\frac{25}{4}] &=& 2[(x+\frac{1}{2})^2-(\frac{5}{2})^2] \\
&=& 2(x+\frac{1}{2}+\frac{5}{2})(x+\frac{1}{2}-\frac{5}{2}) &=& 2(x+3)(x-2) \\
2x^2-12x+18 &=& 2[x^2-6x+9] &=& 2(x-3)^2 \\
3x^2-11x-4 &=& 3[x^2-\frac{11}{3}x-\frac{4}{3}] &=& 3[(x-\frac{11}{6})^2-\frac{121}{36}-\frac{4}{3}] \\
&=& 3[(x-\frac{11}{6})^2-\frac{169}{36}] &=& 3[(x-\frac{11}{6})^2-(\frac{13}{6})^2] \\
&=& 3(x-\frac{11}{6}+\frac{13}{6})(x-\frac{11}{6}-\frac{13}{6}) &=& 3(x+\frac{1}{3})(x-4) \\
20x^2+3x-2 &=& 20[x^2+\frac{3}{20}x-\frac{1}{10}] &=& 20[(x+\frac{3}{40})^2-\frac{9}{1600}-\frac{1}{10}] \\
&=& 20[(x+\frac{3}{40})^2-\frac{169}{1600}] &=& 20[(x+\frac{3}{40})^2-(\frac{13}{40})^2] \\
&=& 20(x+\frac{3}{40}+\frac{13}{40})(x+\frac{3}{40}-\frac{13}{40}) &=& 20(x+\frac{2}{5})(x-\frac{1}{4})
\end{array}$$

Exercice 3

1. On calcule le discriminant du trinôme $x^2 - x - 2$.

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-2) = 9$$

   Le trinome possède deux racines :

$$x_1 = \frac{-(-1) + \sqrt{9}}{2 \times 1} = 2 \quad \text{et} \quad \frac{-(-1) - \sqrt{9}}{2 \times 1} = -1$$

   L'équation $x^2 + x - 2 = 0$ admet pour ensemble solution $S = \{-1; 2\}$.

2. On calcule le discriminant du trinôme $2x^2 - 3x - 5$.

$$\Delta = (-3)^2 - 4 \times 2 \times (-5) = 49$$

   Le trinome possède deux racines :

$$x_1 = \frac{-(-3) + \sqrt{49}}{2 \times 2} = \frac{5}{2} \quad \text{et} \quad \frac{-(-3) - \sqrt{49}}{2 \times 2} = -1$$

   L'équation $2x^2 + 3x - 9 = 0$ admet pour ensemble solution $S = \{-1; \frac{5}{2}\}$.

3. Le trinôme $x^2 - x - 6$ admet pour racines 3 et -2, son signe est celui du coefficient de x^2 donc positif à l'extérieur des racines.

   L'inéquation $x^2 - x - 6 > 0$ admet donc ensemble solution $S =]-\infty; -2[\cup]3; +\infty[$.

4. On remarque tout d'abord que l'inéquation $x(2x + 1) \leqslant 6$ peut se mettre sous la forme $2x^2 + x - 6 \leqslant 0$. Le trinôme $2x^2 + x - 6$ admet pour racines $\frac{3}{2}$ et -2, son signe est contraire à celui du coefficient de x^2 donc négatif à l'intérieur des racines.

   L'inéquation $x(2x + 1) \leqslant 6$ admet donc pour ensemble solution $S = [-2; \frac{3}{2}]$.

Exercice 4

1. L'équation $y = -2x^2 - 12x - 25$ de la parabole peut se mettre sous la forme canonique :

$$y = -2(x - (-3))^2 + (-7)$$

   Le sommet de la parabole d'équation $y = -2x^2 - 12x - 25$ a donc pour coordonnées :

$$S(-3; -7)$$

2. L'équation de la parabole est de la forme $y = a(x - 2)^2 + 4$. le point $P(3; 7)$ appartient à la parabole donc $7 = a(3 - 2)^2 + 4$ d'où $a = 3$.

   L'équation de la parabole de sommet $S(2; 4)$ passant par le point $P(3; 7)$ est donc :

$$y = 3(x - 2)^2 + 4$$