Devoir maison de mathématiques n°2

Exercice 1

On considère les fonctions $f(x) = -x^3 + 4x - 1$ et $g(x) = -x^2 + 3$.

1. Construire leurs courbes représentatives dans un repère orthonormé. (unité : 2cm)
2. Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = g(x)$. (faire figurer les solutions sur le graphique)
3. Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) > g(x)$. (faire figurer les solutions sur le graphique)

Exercice 2

1. Dresser le tableau de variations de la fonction sinus sur l'intervalle $[0; \pi]$.
2. En déduire un encadrement de $\sin x$ pour $\frac{\pi}{3} < x < \frac{5\pi}{6}$.

Exercice 3

Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes :

$$\begin{aligned} f : x &\mapsto \frac{2x+1}{2x^2-5x-3} \\ g : x &\mapsto \sqrt{x^2+x-2} \\ h : x &\mapsto \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \end{aligned}$$

Exercice 4

On considère les fonctions $f(x) = 2x + 3$ et $g(x) = \sqrt{x^2 - 1}$.

1. Exprimer $g \circ f(x)$ en fonction de x.
2. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $g \circ f$.

Problème

On considère les fonctions $f(x) = x^2 - x - 5$ et $g(x) = \dfrac{1}{x-1}$.

1. Donner l'ensemble de définition des fonctions f et g.
2. Étudier les variations de la fonction f.
3. Étudier les variations de la fonction g à partir de sa décomposition sous la forme $v \circ u$ avec u et v deux fonctions de référence.
4. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $g \circ f$.
5. Déterminer le tableau de variations de la fonction $g \circ f$.

Exercice 5*

On considère la fonction $f(x) = \sin(\pi x + \frac{\pi}{6})$.

1. Prouver que la fonction f est 2-périodique.
2. Calculer $f(123456789)$.

Exercice 6**

Prouver que la courbe représentative de la fonction $f(x) = x^3 - 3x^2 + 6$ admet le point $\Omega(1;4)$ pour centre de symétrie.

Exercice 7**

On définit la moyenne harmonique m de deux nombres x et y strictement positifs par la relation :

$$\frac{1}{m} = \frac{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}{2}$$

Prouver que si $x \leqslant y$ alors $x \leqslant m \leqslant y$.