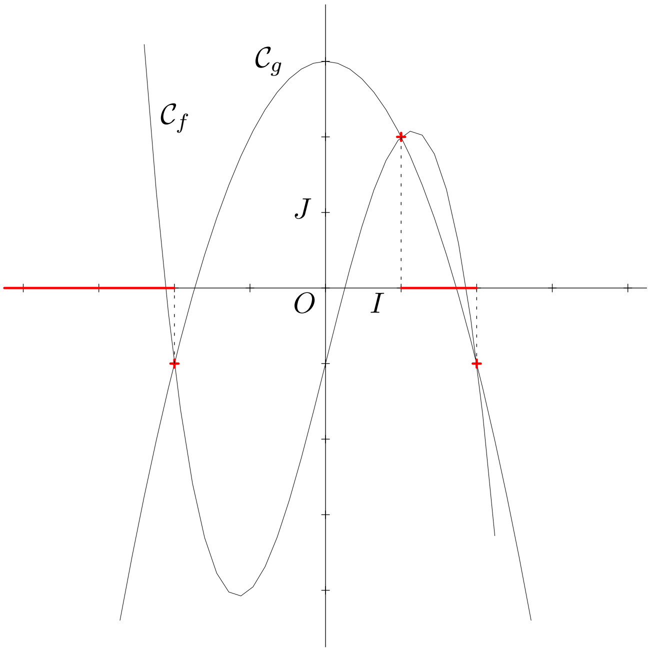
Correction du devoir maison de mathématiques n°2

Exercice 1



L'ensemble des solutions de l'équation $f(x) = g(x)$ est :

$$S = \{-2; 1; 2\}$$

L'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) > g(x)$ est :

$$S =]-\infty; -2[\cup]1; 2[$$

Exercice 2

x	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{5\pi}{6}$		π
					1				
$\sin x$		$\nearrow$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\nearrow$		$\searrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	
	0								0

On a $\frac{\sqrt{3}}{2} > \frac{1}{2}$, on en déduit que $\frac{1}{2} < \sin x < 1$ pour $\frac{\pi}{3} < x < \frac{5\pi}{6}$.

Exercice 3

1. Après avoir factorisé le dénominateur, on obtient :

$$f(x) = \frac{2x+1}{2(x+\frac{1}{2})(x-3)}$$

On a donc $\mathcal{D}_f =]-\infty; -\frac{1}{2}[\cup]-\frac{1}{2}; 3[\cup]3; +\infty[$.

2. Après avoir factorisé le trinôme, on obtient :

$$g(x) = \sqrt{(x+2)(x-1)}$$

Le trinôme est de signe positif à l'extérieur des racines donc $\mathcal{D}_g =]-\infty; -2] \cup [1; +\infty[$.

3. On commence par étudier le signe de la fraction $\frac{1+x}{1-x}$:

x		-1		1	
$1+x$	$-$	0	$+$	$\vert$	$+$
$1-x$	$+$	$\vert$	$+$	0	$-$
$\frac{1+x}{1-x}$	$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$

On obtient donc : $\mathcal{D}_h = [-1; 1[$.

Exercice 4

1.
$$g \circ f(x) = \sqrt{(2x+3)^2 - 1} = \sqrt{4x^2 + 12x + 8} = 2\sqrt{x^2 + 3x + 2}$$

2. La fonction $g \circ f$ est définie pour $x^2 + 3x + 2 \geqslant 0$. Or $x^2 + 3x + 2 = (x+1)(x+2)$, le trinôme est positif à l'extérieur des racines donc $\mathcal{D}_{g \circ f} =]-\infty; -2] \cup [-1; +\infty[$.

Problème

1. On a $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$ et $\mathcal{D}_g = \mathbb{R} \backslash \{1\}$.
2. La fonction f peut se mettre sous la forme canonique $f(x) = (x - \frac{1}{2})^2 + (-\frac{21}{4})$, son tableau de variations est donc :

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	$-\frac{21}{4}$	$\nearrow$	

3. On peut décomposer la fonction g sous la forme $g = v \circ u$ avec $u(x) = x - 1$ et $v(x) = \frac{1}{x}$.
On obtient alors le tableau de variations de la fonction g par composition :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$u(x)$		$\nearrow$	0	$\nearrow$	

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$v(x)$		$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$	

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$g(x)$		$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$	

4. La fonction $g \circ f$ est définie pour $f(x) \neq 1$, les valeurs interdites sont les solutions de l'équation $x^2 - x - 5 = 1$ soit $x^2 - x - 6 = 0$ dont les solutions sont -2 et 3.
On a donc $\mathcal{D}_{g \circ f} = \mathbb{R} \backslash \{-2; 3\} =]-\infty; -2[\cup]-2; 3[\cup]3; +\infty[$.

5. On obtient le tableau de variations de la fonction $g \circ f$ par composition :

x	$-\infty$		-2		$\frac{1}{2}$		3		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	1	$\searrow$	$-\frac{21}{4}$	$\nearrow$	1	$\nearrow$	

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$g(x)$		$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$	

x	$-\infty$		-2		$\frac{1}{2}$		3		$+\infty$
$g \circ f(x)$		$\nearrow$	$\Vert$	$\nearrow$	$-\frac{4}{25}$	$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$	

Exercice 5

1. On utilise la 2π-périodicité de la fonction sinus :

$$f(x+2) = \sin(\pi(x+2) + \frac{\pi}{6}) = \sin(\pi x + 2\pi + \frac{\pi}{6}) = \sin(\pi x + \frac{\pi}{6}) = f(x)$$

   La fonction f est donc 2-périodique.

2. On utilise la 2-périodicité de la fonction f :

$$f(123456789) = f(61728394 \times 2 + 1) = f(1) = \sin(\frac{7\pi}{6}) = -\frac{1}{2}$$

Exercice 6

Il faut montrer que :

$$\phi(h) = \frac{f(1-h) + f(1+h)}{2} = 4$$

$$\begin{aligned}
\phi(h) &= \frac{(1-h)^3 - 3(1-h)^2 + 6 + (1+h)^3 - 3(1+h)^2 + 6}{2} \\
\phi(h) &= \frac{1 - 3h + 3h^2 - h^3 - 3 + 6h - 3h^2 + 6 + 1 + 3h + 3h^2 + h^3 - 3 - 6h - 3h^2 + 6}{2} \\
\phi(h) &= 4
\end{aligned}$$

Exercice 7

La fonction inverse est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$\text{si} \quad x \leqslant y \quad \text{alors} \quad \frac{1}{x} \geqslant \frac{1}{y}$$

La moyenne de $\frac{1}{x}$ et $\frac{1}{y}$ est $\frac{1}{m}$ et on a donc :

$$\frac{1}{x} \geqslant \frac{1}{m} \geqslant \frac{1}{y}$$

En utilisant à nouveau la décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$, on obtient :

$$x \leqslant m \leqslant y$$