# Devoir surveillé de mathématiques n°2

## Exercice 1

On considère les fonctions $f(x) = x^3 - 4x + 2$ et $g(x) = -x^2 - 2x + 2$.

1. Construire leurs courbes représentatives dans un repère orthonormé. (unité : 2cm)
2. Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = g(x)$. (faire figurer les solutions sur le graphique)
3. Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) < g(x)$. (faire figurer les solutions sur le graphique)

## Exercice 2

1. Dresser le tableau de variations de la fonction cosinus sur l'intervalle $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$.
2. En déduire un encadrement de $\cos x$ pour $-\frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{3}$.

## Exercice 3

Déterminer l'ensemble de définition de chacune des fonctions suivantes :

$$\begin{array}{lcl} f : x & \mapsto & \dfrac{3x-1}{3x^2+5x-2} \\ g : x & \mapsto & \sqrt{2x^2+3x-2} \\ h : x & \mapsto & \sqrt{\dfrac{2+x}{3-x}} \end{array}$$

## Exercice 4

On considère la fonction $f(x) = x^2 - 2x + 3$.

1. Prouver que $f(1+h) = f(1-h)$ pour tout $h \in \mathbb{R}$.
2. En déduire l'existence d'une symétrie de la courbe représentative de la fonction $f$ dans un repère orthonormé.

## Exercice 5

Déterminer l'ensemble de définition ainsi que les variations de la fonction $v \circ u$ dans chacun des cas suivants :

$$\begin{array}{rcl} u(x) = x^2 & \text{et} & v(x) = x+5 \\ u(x) = x+2 & \text{et} & v(x) = \dfrac{1}{x} \\ u(x) = x-3 & \text{et} & v(x) = \sqrt{x} \end{array}$$

# Problème

L'objet de ce problème est l'étude des variations de la fonction $f(x) = \frac{1}{ax^2+bx+c}$ $a, b, c \in \mathbb{R}$ .

## 1. Étude d'un exemple

On considère la fonction $g : x \mapsto \frac{1}{x^2+x-2}$

1.1 Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $g$.

1.2 Donner l'ensemble de définition et les variations de la fonction $v(x) = \frac{1}{x}$.

1.3 Déterminer l'ensemble de définition et les variations de la fonction $u(x) = x^2 + x - 2$.
(on pourra utiliser la forme canonique d'un trinôme du second degré)

1.4 Déterminer à quel intervalle appartient $u(x)$ dans chacun des cas suivants :

$$x \in \,]-\infty; -2[ \quad ; \quad x \in \,]-2; -\frac{1}{2}] \quad ; \quad x \in [-\frac{1}{2}; 1[ \quad \text{et} \quad x \in \,]1; +\infty[$$

1.5 En déduire le tableau de variations de la fonction $g$.
(on pourra décomposer $g$ sous la forme $g = v \circ u$)

## 2. Étude du cas général

2.1 Déterminer en fonction de $a$, $b$ et $c$ les réels $m$ et $n$ tels que $ax^2 + bx + c = a(x - m)^2 + n$.
(on donnera le détail des calculs)

2.2 En déduire le tableau de variations de la fonction $u(x) = ax^2 + bx + c$ pour $a > 0$ puis pour $a < 0$.
(on fera figurer dans le tableau les valeurs $m$ et $n$)

2.3 En déduire le tableau de signe de la fonction $u$ dans les différents cas suivants :

$$a > 0 \text{ et } n > 0 \quad ; \quad a > 0 \text{ et } n < 0 \quad ; \quad a < 0 \text{ et } n < 0 \quad ; \quad a < 0 \text{ et } n > 0$$

(on notera $x_1$ et $x_2$ les racines éventuelles de $u$)

2.4 En déduire le tableau de variations de la fonction $f$ dans les différents cas précédents.
(on pourra décomposer $f$ sous la forme $f = v \circ u$ avec $v(x) = \frac{1}{x}$)