Devoir surveillé de mathématiques n°2

Exercice 1

On considère les fonctions $f(x) = -x^3 + 4x - 2$ et $g(x) = x^2 + 2x - 2$.

1. Construire leurs courbes représentatives dans un repère orthonormé. (unité : 2cm)
2. Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = g(x)$. (faire figurer les solutions sur le graphique)
3. Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) < g(x)$. (faire figurer les solutions sur le graphique)

Exercice 2

1. Dresser le tableau de variations de la fonction cosinus sur l'intervalle $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$.
2. En déduire un encadrement de $\cos x$ pour $-\frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{6}$.

Exercice 3

Déterminer l'ensemble de définition de chacune des fonctions suivantes :

$$\begin{array}{rcl} f : x & \mapsto & \dfrac{2x+3}{3x^2-5x-2} \\ g : x & \mapsto & \sqrt{2x^2-3x-2} \\ h : x & \mapsto & \sqrt{\dfrac{3+x}{2-x}} \end{array}$$

Exercice 4

On considère la fonction $f(x) = x^2 - 2x - 3$.

1. Prouver que $f(1+h) = f(1-h)$ pour tout $h \in \mathbb{R}$.
2. En déduire l'existence d'une symétrie de la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé.

Exercice 5

Déterminer l'ensemble de définition ainsi que les variations de la fonction $v \circ u$ dans chacun des cas suivants :

$$\begin{array}{rcl} u(x) = x^2 & \text{et} & v(x) = x - 5 \\ u(x) = x - 2 & \text{et} & v(x) = \dfrac{1}{x} \\ u(x) = x + 3 & \text{et} & v(x) = \sqrt{x} \end{array}$$

Problème

L'objet de ce problème est l'étude des variations de la fonction $f(x) = \frac{1}{ax^2+bx+c} \quad a, b, c \in \mathbb{R}$.

1. Étude d'un exemple

On considère la fonction $g : x \mapsto \frac{1}{x^2-x-2}$

1.1 Déterminer l'ensemble de définition de la fonction g.

1.2 Donner l'ensemble de définition et les variations de la fonction $v(x) = \frac{1}{x}$.

1.3 Déterminer l'ensemble de définition et les variations de la fonction $u(x) = x^2 - x - 2$.
(on pourra utiliser la forme canonique d'un trinôme du second degré)

1.4 Déterminer à quel intervalle appartient $u(x)$ dans chacun des cas suivants :

$$x \in \,]-\infty; -1[\quad ; \quad x \in \,]-1; \frac{1}{2}] \quad ; \quad x \in [\frac{1}{2}; 2[\quad \text{et} \quad x \in \,]2; +\infty[$$

1.5 En déduire le tableau de variations de la fonction g.
(on pourra décomposer g sous la forme $g = v \circ u$)

2. Étude du cas général

2.1 Déterminer en fonction de a, b et c les réels m et n tels que $ax^2 + bx + c = a(x-m)^2 + n$.
(on donnera le détail des calculs)

2.2 En déduire le tableau de variations de la fonction $u(x) = ax^2 + bx + c$ pour $a > 0$ puis pour $a < 0$.
(on fera figurer dans le tableau les valeurs m et n)

2.3 En déduire le tableau de signe de la fonction u dans les différents cas suivants :

$$a > 0 \text{ et } n > 0 \quad ; \quad a > 0 \text{ et } n < 0 \quad ; \quad a < 0 \text{ et } n < 0 \quad ; \quad a < 0 \text{ et } n > 0$$

(on notera x_1 et x_2 les racines éventuelles de u)

2.4 En déduire le tableau de variations de la fonction f dans les différents cas précédents.
(on pourra décomposer f sous la forme $f = v \circ u$ avec $v(x) = \frac{1}{x}$)