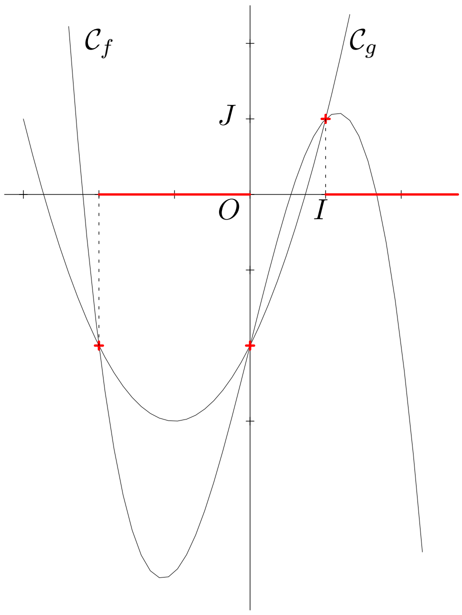
Correction du devoir surveillé de mathématiques n°2

Exercice 1



L'ensemble des solutions de l'équation $f(x) = g(x)$ est :

$$S = \{-2; 0; 1\}$$

L'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) < g(x)$ est :

$$S =]-2; 0[\cup]1; +\infty[$$

Exercice 2

x	$-\frac{\pi}{2}$		$-\frac{\pi}{3}$		0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$
$\cos x$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\searrow$	0

On a $\frac{1}{2} < \frac{\sqrt{3}}{2}$, on en déduit que $\frac{1}{2} < \cos x < 1$ pour $-\frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{6}$.

Exercice 3

1. Les valeurs interdites de la fonction f sont les racines du trinôme $3x^2 - 5x - 2$:

   $$\Delta = (-5)^2 - 4 \times 3 \times (-2) = 49 \qquad x_1 = \frac{-(-5) + \sqrt{49}}{2 \times 3} = 2 \qquad x_2 = \frac{-(-5) - \sqrt{49}}{2 \times 3} = -\frac{1}{3}$$

   D'où $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \backslash \{-\frac{1}{3}; 2\}$.

2. On commence par calculer les racines du trinôme $2x^2 - 3x - 2$:

$$\Delta = (-3)^2 - 4 \times 2 \times (-2) = 25 \qquad x_1 = \frac{-(-3) + \sqrt{25}}{2 \times 2} = 2 \qquad x_2 = \frac{-(-3) - \sqrt{25}}{2 \times 2} = -\frac{1}{2}$$

Le trinôme est positif à l'extérieur des racines d'où $\mathcal{D}_g =]-\infty; -\frac{1}{2}] \cup [2; +\infty[$.

3. On étudie le signe du quotient $\frac{3+x}{2-x}$:

x		-3		2	
$3+x$	$-$	0	$+$	$\vert$	$+$
$2-x$	$+$	$\vert$	$+$	0	$-$
$\frac{3+x}{2-x}$	$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$

D'où $\mathcal{D}_h = [-3; 2[$.

Exercice 4

$$f(1+h) = (1+h)^2 - 2(1+h) - 3 = 1 + 2h + h^2 - 2 - 2h - 3 = h^2 - 4$$
$$f(1-h) = (1-h)^2 - 2(1-h) - 3 = 1 - 2h + h^2 - 2 + 2h - 3 = h^2 - 4$$

Comme $f(1+h) = f(1-h)$ pour tout $h \in \mathbb{R}$, la courbe représentative de la fonction f est donc symétrique par rapport à la droite d'équation $x = 1$.

Exercice 5

1. On a $v \circ u(x) = x^2 - 5$ d'où $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.
On commence par donner les tableaux de variations des fonctions u et v :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
x^2		$\searrow$	0	$\nearrow$	

x	$-\infty$		$+\infty$
$x-5$		$\nearrow$	

On obtient ensuite le tableau de variations de la fonction $v \circ u$ par composition :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
x^2-5		$\searrow$	-5	$\nearrow$	

2. On a $v \circ u(x) = \frac{1}{x-2}$ d'où $\mathcal{D} = \mathbb{R} \backslash \{2\}$.
On commence par donner les tableaux de variations des fonctions u et v :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$x-2$		$\nearrow$	0	$\nearrow$	

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\frac{1}{x}$		$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$	

On obtient ensuite le tableau de variations de la fonction $v \circ u$ par composition :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$\frac{1}{x-2}$		$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$	

3. On a $v \circ u(x) = \sqrt{x+3}$ d'où $\mathcal{D} = [-3; +\infty[$.
   On commence par donner les tableaux de variations des fonctions u et v :

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
				$\nearrow$	
$x+3$			0		
		$\nearrow$			

x	0		$+\infty$
$\sqrt{x}$		$\nearrow$	
	0		

   On obtient ensuite le tableau de variations de la fonction $v \circ u$ par composition :

x	-3		$+\infty$
$\sqrt{x+3}$		$\nearrow$	
	0		

Problème

1. Étude d'un exemple

1.1 On a $x^2 - x - 2 = (x-2)(x+1)$ d'où $\mathcal{D}_g = \mathbb{R}\backslash\{-1; 2\}$.

1.2 On a $\mathcal{D}_v = \mathbb{R}^*$ et :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\frac{1}{x}$		$\searrow$	$\|\|$	$\searrow$	

1.3 On a $\mathcal{D}_u = \mathbb{R}$ et $x^2 - x - 2 = (x - \frac{1}{2})^2 - \frac{9}{4}$ d'où :

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
		$\searrow$						$\nearrow$	
$u(x)$			0				0		
				$\searrow$		$\nearrow$			
					$-\frac{9}{4}$				

1.4 D'après la question précédente :

$$\begin{aligned}
x \in\,]-\infty; -1[&\quad\Rightarrow\quad u(x) \in]0; +\infty[\\
x \in\,]-1; \frac{1}{2}] &\quad\Rightarrow\quad u(x) \in [-\frac{9}{4}; 0[\\
x \in [\frac{1}{2}; 2[&\quad\Rightarrow\quad u(x) \in [-\frac{9}{4}; 0[\\
x \in]2; +\infty[&\quad\Rightarrow\quad u(x) \in]0; +\infty[
\end{aligned}$$

1.5 On en déduit le tableau de variations de la fonction $g = v \circ u$ par composition :

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
					$-\frac{4}{9}$				
$g(x)$		$\nearrow$	$\|\|$	$\nearrow$		$\searrow$	$\|\|$	$\searrow$	

2. Étude du cas général

2.1 Pour $a \neq 0$ on a :

$$ax^2 + bx + c = a[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}] = a[(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b}{4a^2} + \frac{c}{a}] = a(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

D'où $m = -\frac{b}{2a}$ et $n = -\frac{b^2-4ac}{4a}$.

2.2 Le tableau de variations de la fonction $u(x) = ax^2 + bx + c$ est donc :

$a > 0$

x	$-\infty$		m		$+\infty$
$u(x)$		$\searrow$	n	$\nearrow$	

$a < 0$

x	$-\infty$		m		$+\infty$
$u(x)$		$\nearrow$	n	$\searrow$	

2.3 On en déduit le tableau de signe de la fonction u dans les différents cas suivants :

$a > 0$ et $n > 0$

x	$-\infty$		$+\infty$
$u(x)$		$+$	

$a > 0$ et $n < 0$

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$u(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$a < 0$ et $n < 0$

x	$-\infty$		$+\infty$
$u(x)$		$-$	

$a < 0$ et $n > 0$

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$u(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

2.4 On en déduit le tableau de variations de la fonction $g = v \circ u$ dans les différents cas précédents par composition :

$a > 0$ et $n > 0$

x	$-\infty$		m		$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow$	$\frac{1}{n}$	$\searrow$	

$a > 0$ et $n < 0$

x	$-\infty$		x_1		m		x_2		$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow$	$\Vert$	$\nearrow$	$\frac{1}{n}$	$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$	

$a < 0$ et $n < 0$

x	$-\infty$		m		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	$\frac{1}{n}$	$\nearrow$	

$a < 0$ et $n > 0$

x	$-\infty$		x_1		m		x_2		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$	$\frac{1}{n}$	$\nearrow$	$\Vert$	$\nearrow$	