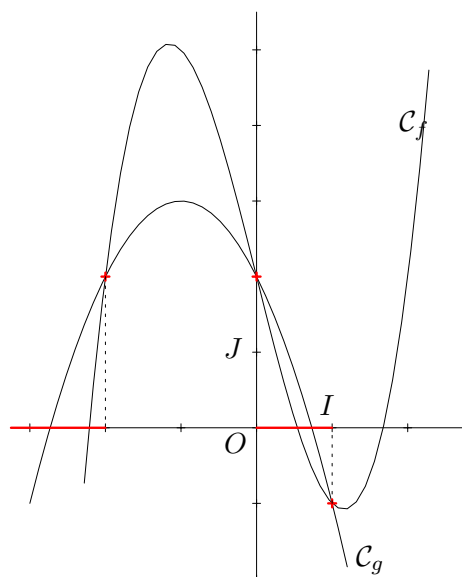


Correction du devoir surveillé de mathématiques n°2

Exercice 1



L'ensemble des solutions de l'équation $f(x) = g(x)$ est :

$$S = \{-2; 0; 1\}$$

L'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) < g(x)$ est :

$$S =]-\infty; -2[\cup]0; 1[$$

Exercice 2

x	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos x$		$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	
	0				0

On a $\frac{1}{2} < \frac{\sqrt{3}}{2}$, on en déduit que $\frac{1}{2} < \cos x < 1$ pour $-\frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{3}$.

Exercice 3

1. Les valeurs interdites de la fonction f sont les racines du trinôme $3x^2 + 5x - 2$:

$$\Delta = 5^2 - 4 \times 3 \times (-2) = 49 \quad x_1 = \frac{-5 + \sqrt{49}}{2 \times 3} = \frac{1}{3} \quad x_2 = \frac{-5 - \sqrt{49}}{2 \times 3} = -2$$

D'où $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-2; \frac{1}{3}\}$.

2. On commence par calculer les racines du trinôme $2x^2 + 3x - 2$:

$$\Delta = 3^2 - 4 \times 2 \times (-2) = 25 \quad x_1 = \frac{-3 + \sqrt{25}}{2 \times 2} = \frac{1}{2} \quad x_2 = \frac{-3 - \sqrt{25}}{2 \times 2} = -2$$

Le trinôme est positif à l'extérieur des racines d'où $\mathcal{D}_g =]-\infty; -2] \cup [\frac{1}{2}; +\infty[$.

3. On étudie le signe du quotient $\frac{2+x}{3-x}$:

x		-2		3	
$2+x$	-	0	+		+
$3-x$	+		+	0	-
$\frac{2+x}{3-x}$	-	0	+		-

D'où $\mathcal{D}_h = [-2; 3[$.

Exercice 4

$$f(1+h) = (1+h)^2 - 2(1+h) + 3 = 1 + 2h + h^2 - 2 - 2h + 3 = h^2 + 2$$

$$f(1-h) = (1-h)^2 - 2(1-h) + 3 = 1 - 2h + h^2 - 2 + 2h + 3 = h^2 + 2$$

Comme $f(1+h) = f(1-h)$ pour tout $h \in \mathbb{R}$, la courbe représentative de la fonction f est donc symétrique par rapport à la droite d'équation $x = 1$.

Exercice 5

1. On a $v \circ u(x) = x^2 + 5$ d'où $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

On commence par donner les tableaux de variations des fonctions u et v :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
x^2			↘ ↗		
			0		

x	$-\infty$		$+\infty$
$x+5$			↗

On obtient ensuite le tableau de variations de la fonction $v \circ u$ par composition :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$x^2 + 5$			↘ ↗		
			5		

2. On a $v \circ u(x) = \frac{1}{x+2}$ d'où $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

On commence par donner les tableaux de variations des fonctions u et v :

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$x+2$			↗		
			0		

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\frac{1}{x}$			↘ ↘		

On obtient ensuite le tableau de variations de la fonction $v \circ u$ par composition :

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$\frac{1}{x+2}$			↘ ↘		

3. On a $v \circ u(x) = \sqrt{x-3}$ d'où $\mathcal{D} = [3; +\infty[$.

On commence par donner les tableaux de variations des fonctions u et v :

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$x-3$		0	
		↗	

x	0	$+\infty$
\sqrt{x}	0	
	↗	

On obtient ensuite le tableau de variations de la fonction $v \circ u$ par composition :

x	3	$+\infty$
$\sqrt{x-3}$	0	
	↗	

Problème

1. Étude d'un exemple

1.1 On a $x^2 + x - 2 = (x+2)(x-1)$ d'où $\mathcal{D}_g = \mathbb{R} \setminus \{-2; 1\}$.

1.2 On a $\mathcal{D}_v = \mathbb{R}^*$ et :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\frac{1}{x}$			
	↘		↘

1.3 On a $\mathcal{D}_u = \mathbb{R}$ et $x^2 + x - 2 = (x - (-\frac{1}{2}))^2 - \frac{9}{4}$ d'où :

x	$-\infty$	-2	$-\frac{1}{2}$	1	$+\infty$
$u(x)$		0		0	
	↘		↘	↗	
		↘	$-\frac{9}{4}$	↗	

1.4 D'après la question précédente :

$$x \in]-\infty; -2[\Rightarrow u(x) \in]0; +\infty[$$

$$x \in]-2; -\frac{1}{2}] \Rightarrow u(x) \in [-\frac{9}{4}; 0[$$

$$x \in [-\frac{1}{2}; 1[\Rightarrow u(x) \in [-\frac{9}{4}; 0[$$

$$x \in]1; +\infty[\Rightarrow u(x) \in]0; +\infty[$$

1.5 On en déduit le tableau de variations de la fonction $g = v \circ u$ par composition :

x	$-\infty$	-2	$-\frac{1}{2}$	1	$+\infty$
$g(x)$			$-\frac{9}{4}$		
	↗		↘		↘

2. Étude du cas général

2.1 Pour $a \neq 0$ on a :

$$ax^2 + bx + c = a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right] = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right] = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

D'où $m = -\frac{b}{2a}$ et $n = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$.

2.2 Le tableau de variations de la fonction $u(x) = ax^2 + bx + c$ est donc :

$a > 0$	<table style="border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">x</td> <td style="padding: 5px;">$-\infty$</td> <td style="padding: 5px;">m</td> <td style="padding: 5px;">$+\infty$</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">$u(x)$</td> <td style="text-align: center; padding: 5px;">\searrow</td> <td style="text-align: center; padding: 5px;">n</td> <td style="text-align: center; padding: 5px;">\nearrow</td> </tr> </table>	x	$-\infty$	m	$+\infty$	$u(x)$	\searrow	n	\nearrow
x	$-\infty$	m	$+\infty$						
$u(x)$	\searrow	n	\nearrow						

$a < 0$	<table style="border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">x</td> <td style="padding: 5px;">$-\infty$</td> <td style="padding: 5px;">m</td> <td style="padding: 5px;">$+\infty$</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">$u(x)$</td> <td style="text-align: center; padding: 5px;">\nearrow</td> <td style="text-align: center; padding: 5px;">n</td> <td style="text-align: center; padding: 5px;">\searrow</td> </tr> </table>	x	$-\infty$	m	$+\infty$	$u(x)$	\nearrow	n	\searrow
x	$-\infty$	m	$+\infty$						
$u(x)$	\nearrow	n	\searrow						

2.3 On en déduit le tableau de signe de la fonction u dans les différents cas suivants :

$a > 0$ et $n > 0$	<table style="border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">x</td> <td style="padding: 5px;">$-\infty$</td> <td style="padding: 5px;">$+\infty$</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">$u(x)$</td> <td style="text-align: center; padding: 5px;">$+$</td> <td style="padding: 5px;"></td> </tr> </table>	x	$-\infty$	$+\infty$	$u(x)$	$+$	
x	$-\infty$	$+\infty$					
$u(x)$	$+$						

$a > 0$ et $n < 0$	<table style="border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">x</td> <td style="padding: 5px;">$-\infty$</td> <td style="padding: 5px;">x_1</td> <td style="padding: 5px;">x_2</td> <td style="padding: 5px;">$+\infty$</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">$u(x)$</td> <td style="text-align: center; padding: 5px;">$+$</td> <td style="text-align: center; padding: 5px;">0</td> <td style="text-align: center; padding: 5px;">$-$</td> <td style="text-align: center; padding: 5px;">0</td> <td style="text-align: center; padding: 5px;">$+$</td> </tr> </table>	x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$	$u(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$								
$u(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$							

$a < 0$ et $n < 0$	<table style="border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">x</td> <td style="padding: 5px;">$-\infty$</td> <td style="padding: 5px;">$+\infty$</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">$u(x)$</td> <td style="text-align: center; padding: 5px;">$-$</td> <td style="padding: 5px;"></td> </tr> </table>	x	$-\infty$	$+\infty$	$u(x)$	$-$	
x	$-\infty$	$+\infty$					
$u(x)$	$-$						

$a < 0$ et $n > 0$	<table style="border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">x</td> <td style="padding: 5px;">$-\infty$</td> <td style="padding: 5px;">x_1</td> <td style="padding: 5px;">x_2</td> <td style="padding: 5px;">$+\infty$</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">$u(x)$</td> <td style="text-align: center; padding: 5px;">$-$</td> <td style="text-align: center; padding: 5px;">0</td> <td style="text-align: center; padding: 5px;">$+$</td> <td style="text-align: center; padding: 5px;">0</td> <td style="text-align: center; padding: 5px;">$-$</td> </tr> </table>	x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$	$u(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$								
$u(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$							

2.4 On en déduit le tableau de variations de la fonction $g = v \circ u$ dans les différents cas précédents par composition :

$a > 0$ et $n > 0$	<table style="border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">x</td> <td style="padding: 5px;">$-\infty$</td> <td style="padding: 5px;">m</td> <td style="padding: 5px;">$+\infty$</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">$f(x)$</td> <td style="text-align: center; padding: 5px;">\nearrow</td> <td style="text-align: center; padding: 5px;">$\frac{1}{n}$</td> <td style="text-align: center; padding: 5px;">\searrow</td> </tr> </table>	x	$-\infty$	m	$+\infty$	$f(x)$	\nearrow	$\frac{1}{n}$	\searrow
x	$-\infty$	m	$+\infty$						
$f(x)$	\nearrow	$\frac{1}{n}$	\searrow						

$a > 0$ et $n < 0$	<table style="border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">x</td> <td style="padding: 5px;">$-\infty$</td> <td style="padding: 5px;">x_1</td> <td style="padding: 5px;">m</td> <td style="padding: 5px;">x_2</td> <td style="padding: 5px;">$+\infty$</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">$f(x)$</td> <td style="text-align: center; padding: 5px;">\nearrow</td> <td style="text-align: center; padding: 5px;">\nearrow</td> <td style="text-align: center; padding: 5px;">$\frac{1}{n}$</td> <td style="text-align: center; padding: 5px;">\searrow</td> <td style="text-align: center; padding: 5px;">\searrow</td> </tr> </table>	x	$-\infty$	x_1	m	x_2	$+\infty$	$f(x)$	\nearrow	\nearrow	$\frac{1}{n}$	\searrow	\searrow
x	$-\infty$	x_1	m	x_2	$+\infty$								
$f(x)$	\nearrow	\nearrow	$\frac{1}{n}$	\searrow	\searrow								

$a < 0$ et $n < 0$	<table style="border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">x</td> <td style="padding: 5px;">$-\infty$</td> <td style="padding: 5px;">m</td> <td style="padding: 5px;">$+\infty$</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">$f(x)$</td> <td style="text-align: center; padding: 5px;">\searrow</td> <td style="text-align: center; padding: 5px;">$\frac{1}{n}$</td> <td style="text-align: center; padding: 5px;">\nearrow</td> </tr> </table>	x	$-\infty$	m	$+\infty$	$f(x)$	\searrow	$\frac{1}{n}$	\nearrow
x	$-\infty$	m	$+\infty$						
$f(x)$	\searrow	$\frac{1}{n}$	\nearrow						

$a < 0$ et $n > 0$	<table style="border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">x</td> <td style="padding: 5px;">$-\infty$</td> <td style="padding: 5px;">x_1</td> <td style="padding: 5px;">m</td> <td style="padding: 5px;">x_2</td> <td style="padding: 5px;">$+\infty$</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">$f(x)$</td> <td style="text-align: center; padding: 5px;">\searrow</td> <td style="text-align: center; padding: 5px;">\searrow</td> <td style="text-align: center; padding: 5px;">$\frac{1}{n}$</td> <td style="text-align: center; padding: 5px;">\nearrow</td> <td style="text-align: center; padding: 5px;">\nearrow</td> </tr> </table>	x	$-\infty$	x_1	m	x_2	$+\infty$	$f(x)$	\searrow	\searrow	$\frac{1}{n}$	\nearrow	\nearrow
x	$-\infty$	x_1	m	x_2	$+\infty$								
$f(x)$	\searrow	\searrow	$\frac{1}{n}$	\nearrow	\nearrow								