Correction du devoir maison de mathématiques n°3

Exercice 1

$$G_1 = bar\{(A;2),(B;3)\}$$

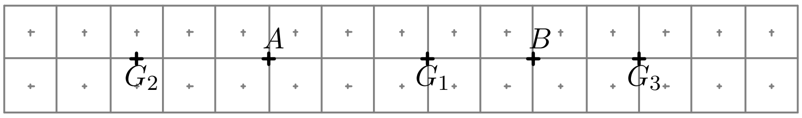
$$\begin{aligned}
2\overrightarrow{G_1A} + 3\overrightarrow{G_1B} &= \overrightarrow{0}\\
2\overrightarrow{G_1A} + 3(\overrightarrow{G_1A} + \overrightarrow{AB}) &= \overrightarrow{0}\\
5\overrightarrow{G_1A} + 3\overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{0}\\
\overrightarrow{AG_1} &= \frac{3}{5}\overrightarrow{AB}
\end{aligned}$$

$$G_2 = bar\{(A;3),(B;-1)\}$$

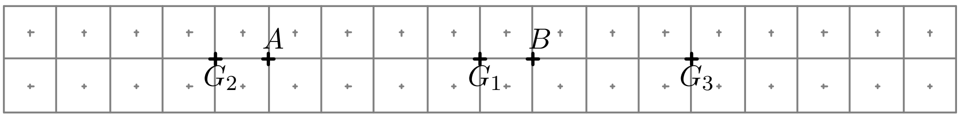
$$\begin{aligned}
3\overrightarrow{G_2A} - \overrightarrow{G_2B} &= \overrightarrow{0}\\
3\overrightarrow{G_2A} - (\overrightarrow{G_2A} + \overrightarrow{AB}) &= \overrightarrow{0}\\
2\overrightarrow{G_2A} - \overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{0}\\
\overrightarrow{AG_2} &= -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}
\end{aligned}$$

$$G_3 = bar\{(A;\frac{1}{3}),(B;-\frac{7}{6})\}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{3}\overrightarrow{G_3A} - \frac{7}{6}\overrightarrow{G_3B} &= \overrightarrow{0}\\
2\overrightarrow{G_3A} - 7\overrightarrow{G_3B} &= \overrightarrow{0}\\
2\overrightarrow{G_3A} - 7(\overrightarrow{G_3A} + \overrightarrow{AB}) &= \overrightarrow{0}\\
-5\overrightarrow{G_3A} - 7\overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{0}\\
\overrightarrow{AG_3} &= \frac{7}{5}\overrightarrow{AB}
\end{aligned}$$



Exercice 2



$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AG_1} &= \frac{4}{5}\overrightarrow{AB}\\
5\overrightarrow{AG_1} - 4\overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{0}\\
5\overrightarrow{AG_1} - 4(\overrightarrow{AG_1} + \overrightarrow{G_1B}) &= \overrightarrow{0}\\
-\overrightarrow{G_1A} - 4\overrightarrow{G_1B} &= \overrightarrow{0}\\
\overrightarrow{G_1A} + 4\overrightarrow{G_1B} &= \overrightarrow{0}
\end{aligned}$$

$$G_1 = bar\{(A;1),(B;4)\}$$

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AG_2} &= -\frac{1}{5}\overrightarrow{AB}\\
5\overrightarrow{AG_2} + \overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{0}\\
5\overrightarrow{AG_2} + (\overrightarrow{AG_2} + \overrightarrow{G_2B}) &= \overrightarrow{0}\\
-6\overrightarrow{G_2A} + \overrightarrow{G_2B} &= \overrightarrow{0}
\end{aligned}$$

$$G_2 = bar\{(A;-6),(B;1)\}$$

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AG_3} &= \frac{8}{5}\overrightarrow{AB}\\
5\overrightarrow{AG_3} - 8\overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{0}\\
5\overrightarrow{AG_3} - 8(\overrightarrow{AG_3} + \overrightarrow{G_3B}) &= \overrightarrow{0}\\
3\overrightarrow{G_3A} - 8\overrightarrow{G_3B} &= \overrightarrow{0}
\end{aligned}$$

$$G_3 = bar\{(A;3),(B;-8)\}$$

Exercice 3

$$G_1 = bar\{(A;3),(B;-1)\}$$

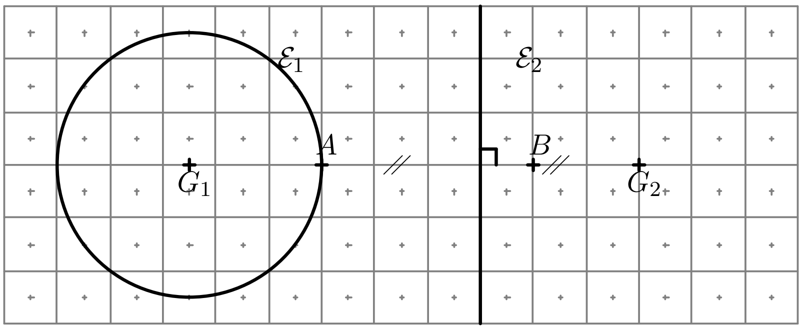
$$\begin{aligned}
||3\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}|| &= AB\\
||3(\overrightarrow{MG_1} + \overrightarrow{G_1A}) - (\overrightarrow{MG_1} + \overrightarrow{G_1B})|| &= AB\\
||2\overrightarrow{MG_1}|| &= AB\\
G_1M &= \frac{1}{2}AB
\end{aligned}$$

$\mathcal{E}_1$ est le cercle de centre G_1 et de rayon $\frac{1}{2}AB$.

$$G_2 = bar\{(A;1),(B;-3)\}$$

$$\begin{aligned}
||\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB}|| &= 2\ AM\\
||(\overrightarrow{MG_2} + \overrightarrow{G_2A}) - 3(\overrightarrow{MG_2} + \overrightarrow{G_2B})|| &= 2\ AM\\
||-2\overrightarrow{MG_2}|| &= 2\ AM\\
G_2M &= AM
\end{aligned}$$

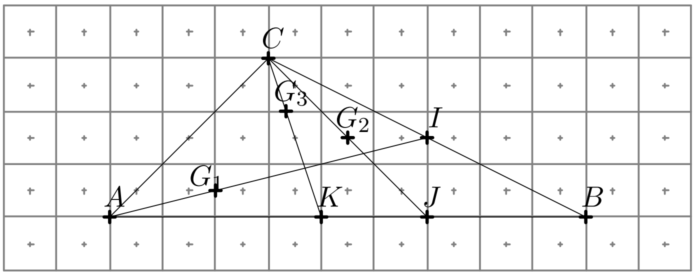
$\mathcal{E}_2$ est la médiatrice du segment $[AG_2]$.



Exercice 4

On utilise la propriété d'associativité du barycentre :

$$\begin{array}{rcl} G_1 &=& bar\{(A;4),(B;1),(C;1)\} \\ I &=& bar\{(B;1),(C;1)\} \\ G_1 &=& bar\{(A;4),(I;2)\} \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} G_2 &=& bar\{(A;1),(B;2),(C;3)\} \\ J &=& bar\{(A;1),(B;2)\} \\ G_2 &=& bar\{(J;3),(C;3)\} \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} G_3 &=& bar\{(A;5),(B;4),(C;18)\} \\ K &=& bar\{(A;5),(B;4)\} \\ G_3 &=& bar\{(K;9),(C;18)\} \end{array}$$

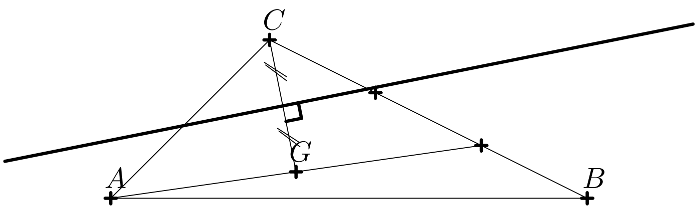


Exercice 5

Soit $G = bar\{(A;3),(B;2),(C;1)\}$, alors :

$$\begin{array}{rcl} ||3\overrightarrow{AM}+2\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CM}|| &=& 6\ CM \\ ||3(\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GM})+2(\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{GM})+(\overrightarrow{CG}+\overrightarrow{GM})|| &=& 6\ CM \\ ||6\overrightarrow{GM}|| &=& 6\ CM \\ GM &=& CM \end{array}$$

L'ensemble des points M cherché est la médiatrice du segment $[CG]$.



Exercice 6*

$$G = bar\{(A;-1),(B;\frac{1}{3})\}$$

$$\begin{array}{rcl} -\overrightarrow{GA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{GB} &=& \overrightarrow{0} \\ -3\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB} &=& \overrightarrow{0} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} -3\overrightarrow{GA}+(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AB}) &=& \overrightarrow{0} \\ -2\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AB} &=& \overrightarrow{0} \\ -\overrightarrow{GA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} &=& \overrightarrow{0} \\ -\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AI} &=& \overrightarrow{0} \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} -\overrightarrow{GA}+(\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GI}) &=& \overrightarrow{0} \\ -2\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GI} &=& \overrightarrow{0} \\ 2\overrightarrow{GA}-\overrightarrow{GI} &=& \overrightarrow{0} \end{array}$$

$$G = bar\{(A;2),(I;-1)\}$$

Exercice 7*

1. On a $G_1 = bar\{(A;-2),(B;5),(C;5)\}$ et $I = bar\{(B;1),(C;1)\} = bar\{(B;5),(C;5)\}$, donc d'après la propriété d'associativité du barycentre $G_1 = bar\{(A;-2),(I;10)\}$ et les points A, I et G_1 sont alignés.
2. On a $G_2 = bar\{(A;5),(B;-2),(C;2)\}$ donc :

$$\begin{array}{rcl}
5\overrightarrow{G_2A} - 2\overrightarrow{G_2B} + 2\overrightarrow{G_2C} & = & \overrightarrow{0} \\
5\overrightarrow{G_2A} - 2(\overrightarrow{G_2A} + \overrightarrow{AB}) + 2(\overrightarrow{G_2A} + \overrightarrow{AC}) & = & \overrightarrow{0} \\
5\overrightarrow{G_2A} - 2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} & = & \overrightarrow{0} \\
5\overrightarrow{G_2A} + 2\overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{AC} & = & \overrightarrow{0} \\
5\overrightarrow{G_2A} + 2\overrightarrow{BC} & = & \overrightarrow{0} \\
\overrightarrow{AG_2} & = & \frac{2}{5}\overrightarrow{BC}
\end{array}$$

Les droites (AG_2) et (BC) sont donc parallèles.

Exercice 8*

Soient I, J, K et L les milieux respectifs des côtés $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[AD]$. On a :

$$\begin{array}{rcl}
I & = & bar\{(A;1),(B;1)\} \\
J & = & bar\{(B;1),(C;1)\} \\
K & = & bar\{(C;1),(D;1)\} \\
L & = & bar\{(A;1),(D;1)\}
\end{array}$$

D'après l'associativité du barycentre :

$$bar\{(A;1),(B;1),(C;1),(D;1)\} = bar\{(I;2),(K;2)\} = bar\{(J;2),(L;2)\}$$

L'isobarycentre des points A, B, C et D est donc le milieu des segments $[IK]$ et $[JL]$.

Exercice 9**

On considère un tétraèdre quelconque $ABCD$ et on définit $G = bar\{(A;1),(B;1),(C;1),(D;1)\}$. On considère ensuite les centres de gravité des faces :

$$\begin{array}{rcl}
G_1 & = & bar\{(B;1),(C;1),(D;1)\} \\
G_2 & = & bar\{(A;1),(C;1),(D;1)\} \\
G_3 & = & bar\{(A;1),(B;1),(D;1)\}
\end{array}$$

D'après l'associativité du barycentre :

$$G = bar\{(G_1;3),(A;1)\} = bar\{(G_2;3),(B;1)\} = bar\{(G_3;3),(C;1)\}$$

Le point G appartient aux droites joignant les sommets au centres de gravité des faces opposées, celles-ci sont donc concourantes.