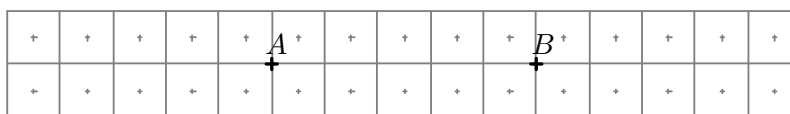


Devoir surveillé de mathématiques n°3

Exercice 1

Dans chacun des cas suivants, exprimer le vecteur $\overrightarrow{AG_i}$ en fonction du vecteur \overrightarrow{AB} puis placer le point G_i sur la figure ci-dessous :

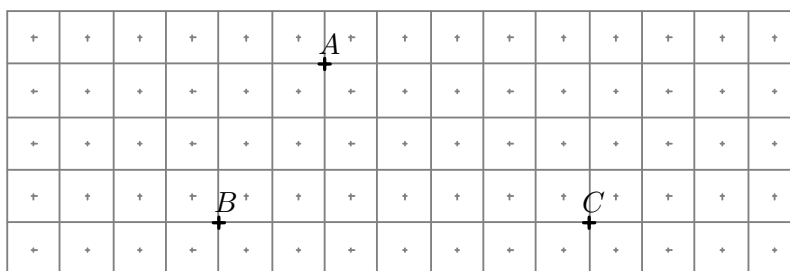
$$G_1 = \text{bar}\{(A; 4), (B; 1)\} \quad G_2 = \text{bar}\{(A; -3), (B; 1)\} \quad G_3 = \text{bar}\{(A; -\frac{2}{3}), (B; \frac{7}{3})\}$$



Exercice 2

En utilisant des barycentres partiels ainsi que la propriété d'associativité du barycentre, déterminer la position des barycentres suivants puis les placer sur la figure ci-dessous :

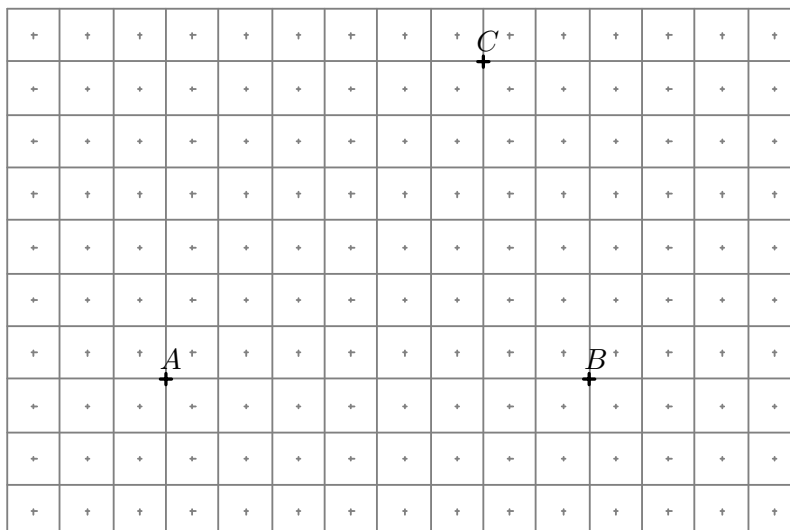
$$G_1 = \text{bar}\{(A; 4), (B; 1), (C; 1)\} \quad G_2 = \text{bar}\{(A; 7), (B; 2), (C; 5)\} \quad G_3 = \text{bar}\{(A; 2), (B; 2), (C; -1)\}$$



Exercice 3

Déterminer les lieux géométriques suivants puis les tracer sur la figure ci-dessous :

$$\mathcal{E}_1 : \|\overrightarrow{5AM} - \overrightarrow{BM}\| = 2 AB \quad \mathcal{E}_2 : \|\overrightarrow{4AM} + 3\overrightarrow{BM}\| = 7 AM \quad \mathcal{E}_3 : \|\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM} + 2\overrightarrow{CM}\| = 4 BM$$



Problème

L'objet de ce problème est de déterminer la définition barycentrique d'un type particulier de courbes appelées *courbes de Bézier quadratiques*.

On considère un triangle quelconque ABC et un nombre réel t appartenant à l'intervalle $[0; 1]$. On définit alors successivement les points I, J et K par :

$$\vec{AI} = t \vec{AB} \quad , \quad \vec{BJ} = t \vec{BC} \quad \text{et} \quad \vec{IK} = t \vec{IJ}$$

1. Étude d'un cas particulier

On considère le cas particulier où $t = \frac{1}{3}$.

1.1 Construire un triangle ABC quelconque puis placer les points I, J et K .

1.2 En utilisant la relation de Chasles, démontrer les égalités suivantes :

$$\vec{AJ} = \frac{2}{3}\vec{AB} + \frac{1}{3}\vec{AC} \quad \text{et} \quad \vec{AK} = \frac{2}{3}\vec{AI} + \frac{1}{3}\vec{AJ}$$

1.3 En déduire $\vec{AK} = \frac{4}{9}\vec{AB} + \frac{1}{9}\vec{AC}$.

1.4 En déduire que $K = \text{bar}\{(A; \frac{4}{9}), (B; \frac{4}{9}), (C; \frac{1}{9})\}$.

2. Étude du cas général

On considère le cas général où t est un réel quelconque de l'intervalle $[0; 1]$.

2.1 En utilisant la relation de Chasles, démontrer les égalités suivantes :

$$\vec{AJ} = (1 - t) \vec{AB} + t \vec{AC} \quad \text{et} \quad \vec{AK} = (1 - t) \vec{AI} + t \vec{AJ}$$

2.2 En déduire $\vec{AK} = 2t(1 - t) \vec{AB} + t^2 \vec{AC}$.

2.3 En déduire que $K = \text{bar}\{(A; (1 - t)^2), (B; 2t(1 - t)), (C; t^2)\}$.

3. Figure

Sur la figure ci-dessous, construire les points K pour $t = 0, t = \frac{1}{3}, t = \frac{1}{2}, t = \frac{2}{3}$ et $t = 1$. Tracer la courbe formée par les points K obtenus en faisant varier t de 0 à 1.

