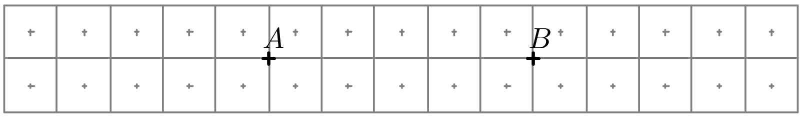
Devoir surveillé de mathématiques n°3

Exercice 1

Dans chacun des cas suivants, exprimer le vecteur $\overrightarrow{AG_i}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{AB}$ puis placer le point G_i sur la figure ci-dessous :

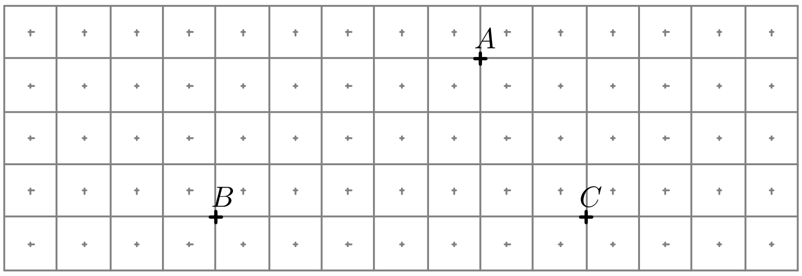
$$G_1 = bar\{(A;1),(B;4)\} \qquad G_2 = bar\{(A;1),(B;-3)\} \qquad G_3 = bar\{(A;\frac{7}{3}),(B;-\frac{2}{3})\}$$



Exercice 2

En utilisant des barycentres partiels ainsi que la propriété d'associativité du barycentre, déterminer la position des barycentres suivants puis les placer sur la figure ci-dessous :

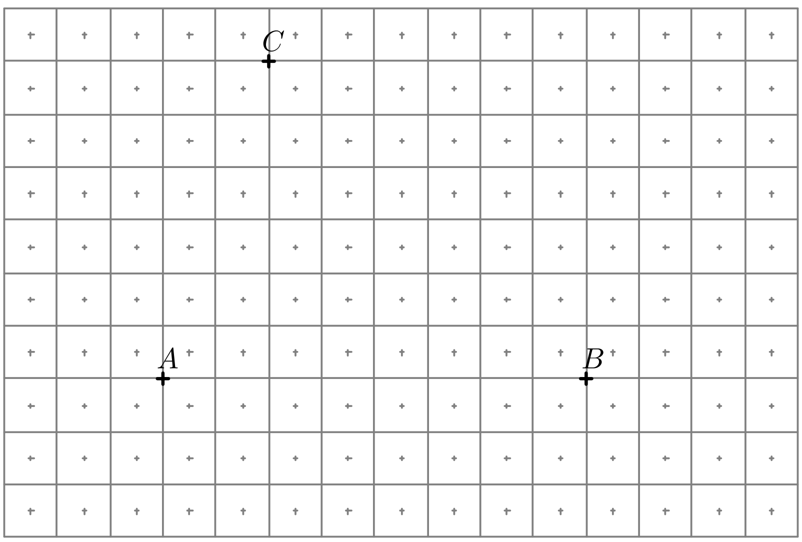
$$G_1 = bar\{(A;4),(B;1),(C;1)\} \qquad G_2 = bar\{(A;7),(B;5),(C;2)\} \qquad G_3 = bar\{(A;2),(B;-1),(C;2)\}$$



Exercice 3

Déterminer les lieux géométriques suivants puis les tracer sur la figure ci-dessous :

$$\mathcal{E}_1 \; : \; ||\overrightarrow{AM} - 5\overrightarrow{BM}|| = 2\ AB \qquad \mathcal{E}_2 \; : \; ||3\overrightarrow{AM} + 4\overrightarrow{BM}|| = 7\ BM \qquad \mathcal{E}_3 \; : \; ||\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM} + 2\overrightarrow{CM}|| = 4\ AM$$



Problème

L'objet de ce problème est de déterminer la définition barycentrique d'un type particulier de courbes appelées *courbes de Bézier quadratiques.*

On considère un triangle quelconque ABC et un nombre réel t appartenant à l'intervalle $[0;1]$. On définit alors successivement les points I, J et K par :

$$\overrightarrow{AI} = t\ \overrightarrow{AB} \quad , \quad \overrightarrow{BJ} = t\ \overrightarrow{BC} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{IK} = t\ \overrightarrow{IJ}$$

1. Étude d'un cas particulier

On considère le cas particulier où $t = \frac{2}{3}$.

1.1 Construire un triangle ABC quelconque puis placer les points I, J et K.

1.2 En utilisant la relation de Chasles, démontrer les égalités suivantes :

$$\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AI} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AJ}$$

1.3 En déduire $\overrightarrow{AK} = \frac{4}{9}\overrightarrow{AB} + \frac{4}{9}\overrightarrow{AC}$.

1.4 En déduire que $K = bar\{(A; \frac{1}{9}), (B; \frac{4}{9}), (C; \frac{4}{9})\}$.

2. Étude du cas général

On considère le cas général où t est un réel quelconque de l'intervalle $[0;1]$.

2.1 En utilisant la relation de Chasles, démontrer les égalités suivantes :

$$\overrightarrow{AJ} = (1-t)\ \overrightarrow{AB} + t\ \overrightarrow{AC} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AK} = (1-t)\ \overrightarrow{AI} + t\ \overrightarrow{AJ}$$

2.2 En déduire $\overrightarrow{AK} = 2t(1-t)\ \overrightarrow{AB} + t^2\ \overrightarrow{AC}$.

2.3 En déduire que $K = bar\{(A; (1-t)^2), (B; 2t(1-t)), (C; t^2)\}$.

3. Figure

Sur la figure ci-dessous, construire les points K pour $t = 0$, $t = \frac{1}{3}$, $t = \frac{1}{2}$, $t = \frac{2}{3}$ et $t = 1$. Tracer la courbe formée par les points K obtenus en faisant varier t de 0 à 1.