

## Corrigé du devoir surveillé de mathématiques n°3

### Exercice 1

On utilise dans chaque cas la définition du barycentre puis la relation de Chasles :

$$\begin{array}{lll}
 G_1 = \text{bar}\{(A; 1), (B; 4)\} & G_2 = \text{bar}\{(A; 1), (B; -3)\} & G_3 = \text{bar}\{(A; \frac{7}{3}), (B; -\frac{2}{3})\} \\
 \vec{G_1A} + 4\vec{G_1B} = \vec{0} & \vec{G_2A} - 3\vec{G_2B} = \vec{0} & -\frac{2}{3}\vec{G_3A} + \frac{7}{3}\vec{G_3B} = \vec{0} \\
 \vec{G_1A} + 4(\vec{G_1A} + \vec{AB}) = \vec{0} & \vec{G_2A} - 3(\vec{G_2A} + \vec{AB}) = \vec{0} & 7\vec{G_3A} - 2\vec{G_3B} = \vec{0} \\
 5\vec{G_1A} + 4\vec{AB} = \vec{0} & -2\vec{G_2A} - 3\vec{AB} = \vec{0} & 7\vec{G_3A} - 2(\vec{G_3A} + \vec{AB}) = \vec{0} \\
 \vec{AG_1} = \frac{4}{5}\vec{AB} & \vec{AG_2} = \frac{3}{2}\vec{AB} & 5\vec{G_3A} - 2\vec{AB} = \vec{0} \\
 & & \vec{AG_3} = -\frac{2}{5}\vec{AB}
 \end{array}$$

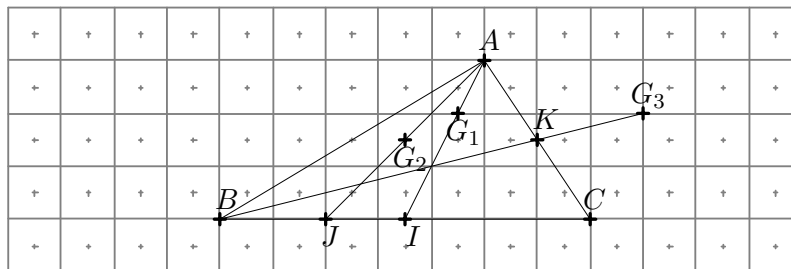


### Exercice 2

On définit dans chacun des cas un barycentre partiel puis on utilise la propriété d'associativité du barycentre. On utilise en outre la propriété suivante :

$$\text{Si } G = \text{bar}\{(A; \alpha), (B; \beta)\} \text{ alors } \vec{AG} = \frac{\beta}{\alpha + \beta}\vec{AB}$$

$$\begin{array}{lll}
 G_1 = \text{bar}\{(A; 4), (B; 1), (C; 1)\} & G_2 = \text{bar}\{(A; 7), (B; 5), (C; 2)\} & G_3 = \text{bar}\{(A; 2), (B; -1), (C; 2)\} \\
 I = \text{bar}\{(B; 1), (C; 1)\} & J = \text{bar}\{(B; 5), (C; 2)\} & K = \text{bar}\{(A; 2), (C; 2)\} \\
 I \text{ milieu de } [BC] & \vec{BJ} = \frac{2}{7}\vec{BC} & K \text{ milieu de } [AC] \\
 G_1 = \text{bar}\{(A; 4), (I; 2)\} & G_2 = \text{bar}\{(A; 7), (J; 7)\} & G_3 = \text{bar}\{(K; 4), (B; -1)\} \\
 \vec{AG_1} = \frac{2}{6}\vec{AI} = \frac{1}{3}\vec{AI} & G_2 \text{ milieu de } [AJ] & \vec{KG_3} = -\frac{1}{3}\vec{KB}
 \end{array}$$



### Exercice 3

1. Soit  $\mathcal{E}_1$  :  $\|\overrightarrow{AM} - 5\overrightarrow{BM}\| = 2 AB$ .

On pose  $G_1 = \text{bar}\{(A; 1), (B; -5)\}$ , alors  $\overrightarrow{AG_1} = \frac{5}{4}\overrightarrow{AB}$ .

De plus  $\overrightarrow{AM} - 5\overrightarrow{BM} = (\overrightarrow{AG_1} + \overrightarrow{G_1M}) - 5(\overrightarrow{BG_1} + \overrightarrow{G_1M}) = -4\overrightarrow{G_1M} - (\overrightarrow{G_1A} - 5\overrightarrow{G_1B}) = -4\overrightarrow{G_1M}$ ,  
d'où :

$$\begin{aligned}\| -4\overrightarrow{G_1M} \| &= 2AB \\ 4G_1M &= 2AB \\ G_1M &= \frac{AB}{2}\end{aligned}$$

$\mathcal{E}_1$  est le cercle de centre  $G_1$  et de rayon  $\frac{AB}{2}$ .

2. Soit  $\mathcal{E}_2$  :  $\|\overrightarrow{3AM} + 4\overrightarrow{BM}\| = 7 BM$ .

On pose  $G_2 = \text{bar}\{(A; 3), (B; 4)\}$ , alors  $\overrightarrow{AG_2} = \frac{4}{7}\overrightarrow{AB}$ .

De plus  $3\overrightarrow{AM} + 4\overrightarrow{BM} = 3(\overrightarrow{AG_2} + \overrightarrow{G_2M}) + 4(\overrightarrow{BG_2} + \overrightarrow{G_2M}) = 7\overrightarrow{G_2M} - (3\overrightarrow{G_2A} + 4\overrightarrow{G_2B}) = 7\overrightarrow{G_2M}$ ,  
d'où :

$$\begin{aligned}\| 7\overrightarrow{G_2M} \| &= 7BM \\ G_2M &= BM\end{aligned}$$

$\mathcal{E}_2$  est la médiatrice du segment  $[G_2B]$ .

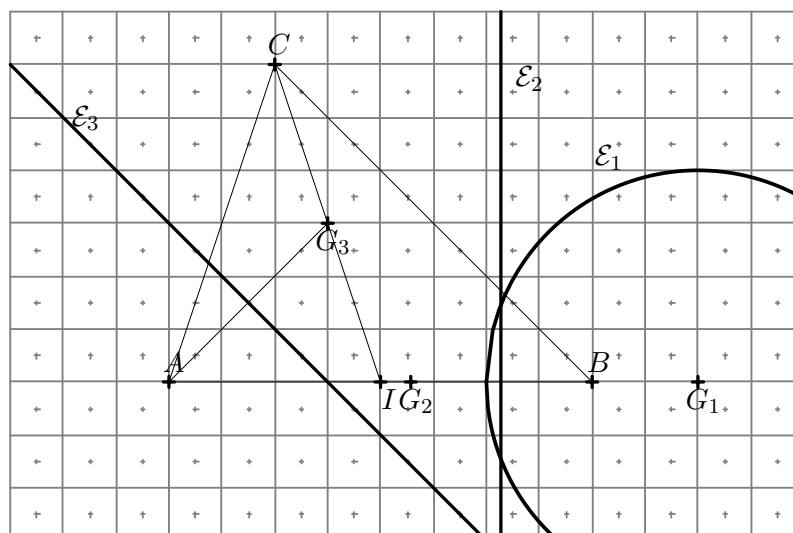
3. Soit  $\mathcal{E}_3$  :  $\|\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM} + 2\overrightarrow{CM}\| = 4 AM$ .

On pose  $G_3 = \text{bar}\{(A; 1), (B; 1), (C; 2)\}$ , alors si  $I$  est le milieu de  $[AB]$ ,  $G_3$  est le milieu de  $[IC]$ .

De plus  $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM} + 2\overrightarrow{CM} = (\overrightarrow{AG_3} + \overrightarrow{G_3M}) + (\overrightarrow{BG_3} + \overrightarrow{G_3M}) + 2(\overrightarrow{CG_3} + \overrightarrow{G_3M}) = 4\overrightarrow{G_3M} - (\overrightarrow{G_3A} + \overrightarrow{G_3B} + 2\overrightarrow{G_3C}) = 4\overrightarrow{G_3M}$ , d'où :

$$\begin{aligned}\| 4\overrightarrow{G_3M} \| &= 4AM \\ G_3M &= AM\end{aligned}$$

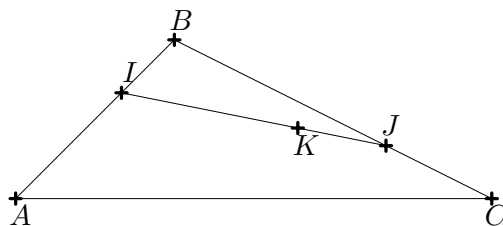
$\mathcal{E}_3$  est la médiatrice du segment  $[G_3A]$ .



## Problème

### 1. Étude d'un cas particulier

1.1 On considère le cas particulier où  $t = \frac{2}{3}$  :



1.2 On utilise la relation de Chasles :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{BJ} &= \frac{2}{3}\overrightarrow{BC} & \overrightarrow{IK} &= \frac{2}{3}\overrightarrow{IJ} \\ \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AJ} &= \frac{2}{3}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) & \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AK} &= \frac{2}{3}(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AJ}) \\ \overrightarrow{AJ} &= \frac{2}{3}\overrightarrow{BA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BA} & \overrightarrow{AK} &= \frac{2}{3}\overrightarrow{IA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AJ} - \overrightarrow{IA} \\ \overrightarrow{AJ} &= \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} & \overrightarrow{AK} &= \frac{1}{3}\overrightarrow{AI} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AJ} \end{aligned}$$

1.3 On utilise les résultats précédents :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AK} &= \frac{1}{3}\overrightarrow{AI} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AJ} \\ \overrightarrow{AK} &= \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}\right) + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}\right) \\ \overrightarrow{AK} &= \frac{2}{9}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{9}\overrightarrow{AB} + \frac{4}{9}\overrightarrow{AC} \\ \overrightarrow{AK} &= \frac{4}{9}\overrightarrow{AB} + \frac{4}{9}\overrightarrow{AC} \end{aligned}$$

1.4 On utilise à nouveau la relation de Chasles :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AK} &= \frac{4}{9}\overrightarrow{AB} + \frac{4}{9}\overrightarrow{AC} \\ \overrightarrow{AK} &= \frac{4}{9}(\overrightarrow{AK} + \overrightarrow{KB}) + \frac{4}{9}(\overrightarrow{AK} + \overrightarrow{KC}) \\ \overrightarrow{AK} &= \frac{8}{9}\overrightarrow{AK} + \frac{4}{9}\overrightarrow{KB} + \frac{4}{9}\overrightarrow{KC} \\ \overrightarrow{AK} - \frac{8}{9}\overrightarrow{AK} - \frac{4}{9}\overrightarrow{KB} - \frac{4}{9}\overrightarrow{KC} &= \overrightarrow{0} \\ -\frac{1}{9}\overrightarrow{KA} - \frac{4}{9}\overrightarrow{KB} - \frac{4}{9}\overrightarrow{KC} &= \overrightarrow{0} \\ \frac{1}{9}\overrightarrow{KA} + \frac{4}{9}\overrightarrow{KB} + \frac{4}{9}\overrightarrow{KC} &= \overrightarrow{0} \end{aligned}$$

Donc :

$$K = \text{bar}\left\{\left(A; \frac{1}{9}\right), \left(B; \frac{4}{9}\right), \left(C; \frac{4}{9}\right)\right\}$$

### 2. Étude du cas général

$t$  est un réel quelconque de l'intervalle  $[0; 1]$ .

2.1 On utilise la relation de Chasles :

$$\begin{aligned} \vec{BJ} &= t\vec{BC} & \vec{IK} &= t\vec{IJ} \\ \vec{BA} + \vec{AJ} &= t(\vec{BA} + \vec{AC}) & \vec{IA} + \vec{AK} &= t(\vec{IA} + \vec{AJ}) \\ \vec{AJ} &= t\vec{BA} + t\vec{AC} - \vec{BA} & \vec{AK} &= t\vec{IA} + t\vec{AJ} - \vec{IA} \\ \vec{AJ} &= (1-t)\vec{AB} + t\vec{AC} & \vec{AK} &= (1-t)\vec{AI} + t\vec{AJ} \end{aligned}$$

2.2 On utilise les résultats précédents :

$$\begin{aligned} \vec{AK} &= (1-t)\vec{AI} + t\vec{AJ} \\ \vec{AK} &= (1-t)(t\vec{AB}) + t((1-t)\vec{AB} + t\vec{AC}) \\ \vec{AK} &= (1-t)t\vec{AB} + t(1-t)\vec{AB} + t^2\vec{AC} \\ \vec{AK} &= 2t(1-t)\vec{AB} + t^2\vec{AC} \end{aligned}$$

2.3 On utilise à nouveau la relation de Chasles :

$$\begin{aligned} \vec{AK} &= 2t(1-t)\vec{AB} + t^2\vec{AC} \\ \vec{AK} &= 2t(1-t)(\vec{AK} + \vec{KB}) + t^2(\vec{AK} + \vec{KC}) \\ \vec{AK} &= (2t(1-t) + t^2)\vec{AK} + 2t(1-t)\vec{KB} + t^2\vec{KC} \\ \vec{AK} - (2t - t^2)\vec{AK} - 2t(1-t)\vec{KB} - t^2\vec{KC} &= \vec{0} \\ (-1 + 2t - t^2)\vec{KA} - 2t(1-t)\vec{KB} - t^2\vec{KC} &= \vec{0} \\ (1-t)^2\vec{KA} + 2t(1-t)\vec{KB} + t^2\vec{KC} &= \vec{0} \end{aligned}$$

Donc :

$$K = \text{bar}\{(A; (1-t)^2), (B; 2t(1-t)), (C; t^2)\}$$

### 3. Figure

