Corrigé du devoir surveillé de mathématiques n°3

Exercice 1

On utilise dans chaque cas la définition du barycentre puis la relation de Chasles :

$G_1 = bar\{(A;1),(B;4)\}$

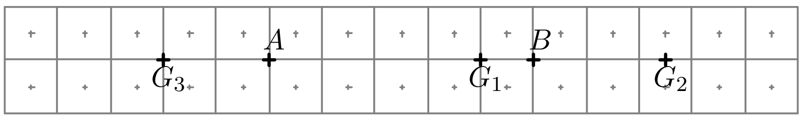
$$\begin{aligned}
\overrightarrow{G_1A} + 4\overrightarrow{G_1B} &= \overrightarrow{0} \\
\overrightarrow{G_1A} + 4(\overrightarrow{G_1A} + \overrightarrow{AB}) &= \overrightarrow{0} \\
5\overrightarrow{G_1A} + 4\overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{0} \\
\overrightarrow{AG_1} &= \frac{4}{5}\overrightarrow{AB}
\end{aligned}$$

$G_2 = bar\{(A;1),(B;-3)\}$

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{G_2A} - 3\overrightarrow{G_1B} &= \overrightarrow{0} \\
\overrightarrow{G_2A} - 3(\overrightarrow{G_2A} + \overrightarrow{AB}) &= \overrightarrow{0} \\
-2\overrightarrow{G_2A} - 3\overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{0} \\
\overrightarrow{AG_2} &= \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}
\end{aligned}$$

$G_3 = bar\{(A;\frac{7}{3}),(B;-\frac{2}{3})\}$

$$\begin{aligned}
-\frac{2}{3}\overrightarrow{G_3A} + \frac{7}{3}\overrightarrow{G_3B} &= \overrightarrow{0} \\
7\overrightarrow{G_3A} - 2\overrightarrow{G_3B} &= \overrightarrow{0} \\
7\overrightarrow{G_3A} - 2(\overrightarrow{G_3A} + \overrightarrow{AB}) &= \overrightarrow{0} \\
5\overrightarrow{G_3A} - 2\overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{0} \\
\overrightarrow{AG_3} &= -\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}
\end{aligned}$$



Exercice 2

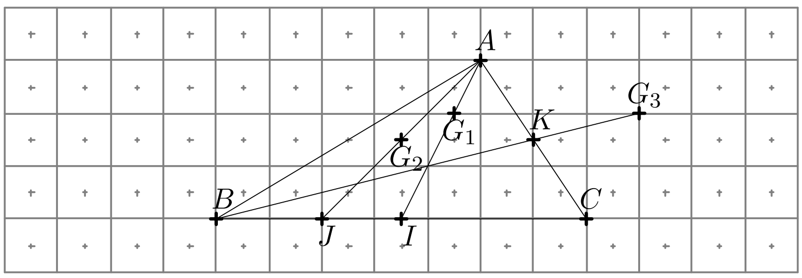
On définit dans chacun des cas un barycentre partiel puis on utilise la propriété d'associativité du barycentre. On utilise en outre la propriété suivante :

$$\text{Si } G = bar\{(A;\alpha),(B;\beta)\} \text{ alors } \overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$$

$$\begin{aligned}
G_1 &= bar\{(A;4),(B;1),(C;1)\} \\
I &= bar\{(B;1),(C;1)\} \\
I &\text{ milieu de } [BC] \\
G_1 &= bar\{(A;4),(I;2)\} \\
\overrightarrow{AG_1} &= \frac{2}{6}\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AI}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G_2 &= bar\{(A;7),(B;5),(C;2)\} \\
J &= bar\{(B;5),(C;2)\} \\
\overrightarrow{BJ} &= \frac{2}{7}\overrightarrow{BC} \\
G_2 &= bar\{(A;7),(J;7)\} \\
G_2 &\text{ milieu de } [AJ]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G_3 &= bar\{(A;2),(B;-1),(C;2)\} \\
K &= bar\{(A;2),(C;2)\} \\
K &\text{ milieu de } [AC] \\
G_3 &= bar\{(K;4),(B;-1)\} \\
\overrightarrow{KG_3} &= -\frac{1}{3}\overrightarrow{KB}
\end{aligned}$$



Exercice 3

1. Soit $\mathcal{E}_1 \quad : \quad ||\overrightarrow{AM} - 5\overrightarrow{BM}|| = 2\ AB$.

   On pose $\quad G_1 = bar\{(A;1),(B;-5)\}$, alors $\overrightarrow{AG_1} = \frac{5}{4}\overrightarrow{AB}$.

   De plus $\quad \overrightarrow{AM} - 5\overrightarrow{BM} = (\overrightarrow{AG_1} + \overrightarrow{G_1M}) - 5(\overrightarrow{BG_1} + \overrightarrow{G_1M}) = -4\overrightarrow{G_1M} - (\overrightarrow{G_1A} - 5\overrightarrow{G_1B}) = -4\overrightarrow{G_1M}$, d'où :

$$\begin{aligned} ||-4\overrightarrow{G_1M}|| &= 2AB \\ 4G_1M &= 2AB \\ G_1M &= \frac{AB}{2} \end{aligned}$$

   $\mathcal{E}_1$ est le cercle de centre G_1 et de rayon $\frac{AB}{2}$.

2. Soit $\mathcal{E}_2 \quad : \quad ||3\overrightarrow{AM} + 4\overrightarrow{BM}|| = 7\ BM$.

   On pose $\quad G_2 = bar\{(A;3),(B;4)\}$, alors $\overrightarrow{AG_2} = \frac{4}{7}\overrightarrow{AB}$.

   De plus $\quad 3\overrightarrow{AM} + 4\overrightarrow{BM} = 3(\overrightarrow{AG_2} + \overrightarrow{G_2M}) + 4(\overrightarrow{BG_2} + \overrightarrow{G_2M}) = 7\overrightarrow{G_2M} - (3\overrightarrow{G_2A} + 4\overrightarrow{G_2B}) = 7\overrightarrow{G_2M}$, d'où :

$$\begin{aligned} ||7\overrightarrow{G_2M}|| &= 7BM \\ G_2M &= BM \end{aligned}$$

   $\mathcal{E}_2$ est la médiatrice du segment $[G_2B]$.

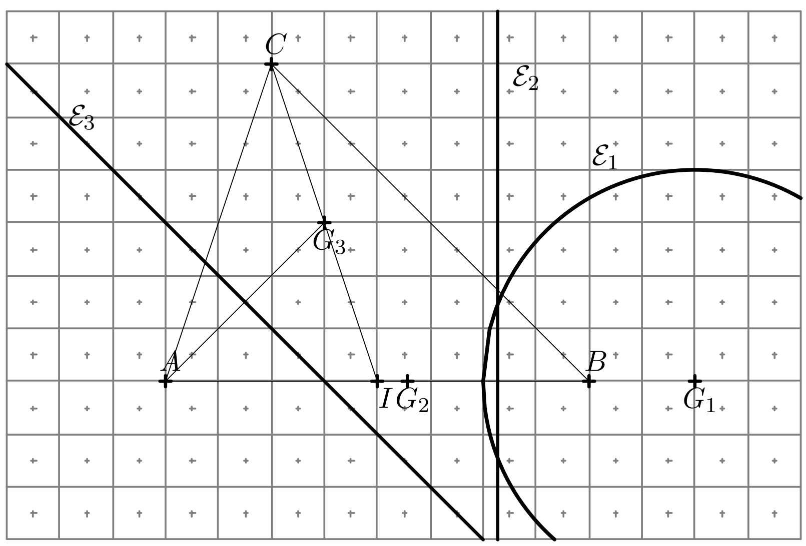
3. Soit $\mathcal{E}_3 \quad : \quad ||\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM} + 2\overrightarrow{CM}|| = 4\ AM$.

   On pose $\quad G_3 = bar\{(A;1),(B;1),(C;2)\}$, alors si I est le milieu de $[AB]$, G_3 est le milieu de $[IC]$.

   De plus $\quad \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM} + 2\overrightarrow{CM} = (\overrightarrow{AG_3} + \overrightarrow{G_3M}) + (\overrightarrow{BG_3} + \overrightarrow{G_3M}) + 2(\overrightarrow{CG_3} + \overrightarrow{G_3M}) = 4\overrightarrow{G_3M} - (\overrightarrow{G_3A} + \overrightarrow{G_3B} + 2\overrightarrow{G_3C}) = 4\overrightarrow{G_3M}$, d'où :

$$\begin{aligned} ||4\overrightarrow{G_3M}|| &= 4AM \\ G_3M &= AM \end{aligned}$$

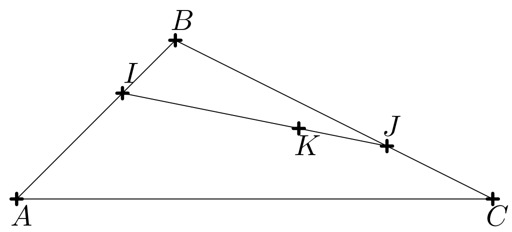
   $\mathcal{E}_3$ est la médiatrice du segment $[G_3A]$.



Problème

1. Étude d'un cas particulier

1.1 On considère le cas particulier où $t = \frac{2}{3}$:



1.2 On utilise la relation de Chasles :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{BJ} &= \frac{2}{3}\overrightarrow{BC} \\
\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AJ} &= \frac{2}{3}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}) \\
\overrightarrow{AJ} &= \frac{2}{3}\overrightarrow{BA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BA} \\
\overrightarrow{AJ} &= \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{IK} &= \frac{2}{3}\overrightarrow{IJ} \\
\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AK} &= \frac{2}{3}(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AJ}) \\
\overrightarrow{AK} &= \frac{2}{3}\overrightarrow{IA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AJ}-\overrightarrow{IA} \\
\overrightarrow{AK} &= \frac{1}{3}\overrightarrow{AI}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AJ}
\end{aligned}$$

1.3 On utilise les résultats précédents :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AK} &= \frac{1}{3}\overrightarrow{AI}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AJ} \\
\overrightarrow{AK} &= \frac{1}{3}(\frac{2}{3}\overrightarrow{AB})+\frac{2}{3}(\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}) \\
\overrightarrow{AK} &= \frac{2}{9}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{9}\overrightarrow{AB}+\frac{4}{9}\overrightarrow{AC} \\
\overrightarrow{AK} &= \frac{4}{9}\overrightarrow{AB}+\frac{4}{9}\overrightarrow{AC}
\end{aligned}$$

1.4 On utilise à nouveau la relation de Chasles :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AK} &= \frac{4}{9}\overrightarrow{AB}+\frac{4}{9}\overrightarrow{AC} \\
\overrightarrow{AK} &= \frac{4}{9}(\overrightarrow{AK}+\overrightarrow{KB})+\frac{4}{9}(\overrightarrow{AK}+\overrightarrow{KC}) \\
\overrightarrow{AK} &= \frac{8}{9}\overrightarrow{AK}+\frac{4}{9}\overrightarrow{KB}+\frac{4}{9}\overrightarrow{KC} \\
\overrightarrow{AK}-\frac{8}{9}\overrightarrow{AK}-\frac{4}{9}\overrightarrow{KB}-\frac{4}{9}\overrightarrow{KC} &= \overrightarrow{0} \\
-\frac{1}{9}\overrightarrow{KA}-\frac{4}{9}\overrightarrow{KB}-\frac{4}{9}\overrightarrow{KC} &= \overrightarrow{0} \\
\frac{1}{9}\overrightarrow{KA}+\frac{4}{9}\overrightarrow{KB}+\frac{4}{9}\overrightarrow{KC} &= \overrightarrow{0}
\end{aligned}$$

Donc :

$$K = bar\{(A;\frac{1}{9}),(B;\frac{4}{9}),(C;\frac{4}{9})\}$$

2. Étude du cas général

t est un réel quelconque de l'intervalle $[0;1]$.

2.1 On utilise la relation de Chasles :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{BJ} &= t\overrightarrow{BC} \\ \overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AJ} &= t(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}) \\ \overrightarrow{AJ} &= t\overrightarrow{BA}+t\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BA} \\ \overrightarrow{AJ} &= (1-t)\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{IK} &= t\overrightarrow{IJ} \\ \overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AK} &= t(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AJ}) \\ \overrightarrow{AK} &= t\overrightarrow{IA}+t\overrightarrow{AJ}-\overrightarrow{IA} \\ \overrightarrow{AK} &= (1-t)\overrightarrow{AI}+t\overrightarrow{AJ} \end{aligned}$$

2.2 On utilise les résultats précédents :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AK} &= (1-t)\overrightarrow{AI}+t\overrightarrow{AJ} \\ \overrightarrow{AK} &= (1-t)(t\overrightarrow{AB})+t((1-t)\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}) \\ \overrightarrow{AK} &= (1-t)t\overrightarrow{AB}+t(1-t)\overrightarrow{AB}+t^2\overrightarrow{AC} \\ \overrightarrow{AK} &= 2t(1-t)\overrightarrow{AB}+t^2\overrightarrow{AC} \end{aligned}$$

2.3 On utilise à nouveau la relation de Chasles :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AK} &= 2t(1-t)\overrightarrow{AB}+t^2\overrightarrow{AC} \\ \overrightarrow{AK} &= 2t(1-t)(\overrightarrow{AK}+\overrightarrow{KB})+t^2(\overrightarrow{AK}+\overrightarrow{KC}) \\ \overrightarrow{AK} &= (2t(1-t)+t^2)\overrightarrow{AK}+2t(1-t)\overrightarrow{KB}+t^2\overrightarrow{KC} \\ \overrightarrow{AK}-(2t-t^2)\overrightarrow{AK}-2t(1-t)\overrightarrow{KB}-t^2\overrightarrow{KC} &= \overrightarrow{0} \\ (-1+2t-t^2)\overrightarrow{KA}-2t(1-t)\overrightarrow{KB}-t^2\overrightarrow{KC} &= \overrightarrow{0} \\ (1-t)^2\overrightarrow{KA}+2t(1-t)\overrightarrow{KB}+t^2\overrightarrow{KC} &= \overrightarrow{0} \end{aligned}$$

Donc :

$$K = bar\{(A;(1-t)^2),(B;2t(1-t)),(C;t^2)\}$$

3. Figure