

Corrigé du devoir surveillé de mathématiques n°3

Exercice 1

On utilise dans chaque cas la définition du barycentre puis la relation de Chasles :

$$\begin{array}{lll}
 G_1 = \text{bar}\{(A; 4), (B; 1)\} & G_2 = \text{bar}\{(A; -3), (B; 1)\} & G_3 = \text{bar}\{(A; -\frac{2}{3}), (B; \frac{7}{3})\} \\
 4\overrightarrow{G_1A} + \overrightarrow{G_1B} = \overrightarrow{0} & -3\overrightarrow{G_2A} + \overrightarrow{G_2B} = \overrightarrow{0} & -\frac{2}{3}\overrightarrow{G_3A} + \frac{7}{3}\overrightarrow{G_3B} = \overrightarrow{0} \\
 4\overrightarrow{G_1A} + (\overrightarrow{G_1A} + \overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{0} & -3\overrightarrow{G_2A} + (\overrightarrow{G_2A} + \overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{0} & -2\overrightarrow{G_3A} + 7\overrightarrow{G_3B} = \overrightarrow{0} \\
 5\overrightarrow{G_1A} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0} & -2\overrightarrow{G_2A} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0} & -2\overrightarrow{G_3A} + 7(\overrightarrow{G_3A} + \overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{0} \\
 \overrightarrow{AG_1} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AB} & \overrightarrow{AG_2} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} & 5\overrightarrow{G_3A} + 7\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0} \\
 & & \overrightarrow{AG_3} = \frac{7}{5}\overrightarrow{AB}
 \end{array}$$

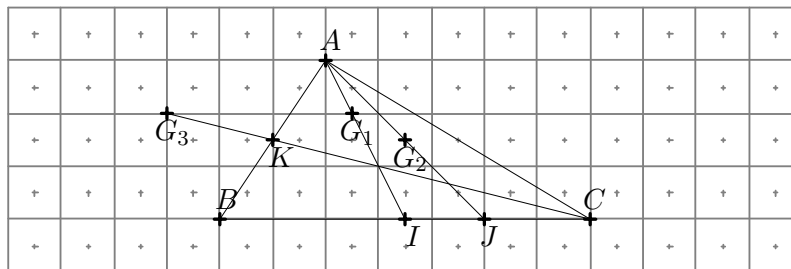


Exercice 2

On définit dans chacun des cas un barycentre partiel puis on utilise la propriété d'associativité du barycentre. On utilise en outre la propriété suivante :

$$\text{Si } G = \text{bar}\{(A; \alpha), (B; \beta)\} \text{ alors } \overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha + \beta}\overrightarrow{AB}$$

$$\begin{array}{lll}
 G_1 = \text{bar}\{(A; 4), (B; 1), (C; 1)\} & G_2 = \text{bar}\{(A; 7), (B; 2), (C; 5)\} & G_3 = \text{bar}\{(A; 2), (B; 2), (C; -1)\} \\
 I = \text{bar}\{(B; 1), (C; 1)\} & J = \text{bar}\{(B; 2), (C; 5)\} & K = \text{bar}\{(A; 2), (B; 2)\} \\
 I \text{ milieu de } [BC] & \overrightarrow{BJ} = \frac{5}{7}\overrightarrow{BC} & K \text{ milieu de } [AB] \\
 G_1 = \text{bar}\{(A; 4), (I; 2)\} & G_2 = \text{bar}\{(A; 7), (J; 7)\} & G_3 = \text{bar}\{(K; 4), (C; -1)\} \\
 \overrightarrow{AG_1} = \frac{2}{6}\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AI} & G_2 \text{ milieu de } [AJ] & \overrightarrow{KG_3} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{KC}
 \end{array}$$



Exercice 3

1. Soit \mathcal{E}_1 : $\|5\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{BM}\| = 2 AB$.

On pose $G_1 = \text{bar}\{(A; 5), (B; -1)\}$, alors $\overrightarrow{AG_1} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$.

De plus $5\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{BM} = 5(\overrightarrow{AG_1} + \overrightarrow{G_1M}) - (\overrightarrow{BG_1} + \overrightarrow{G_1M}) = 4\overrightarrow{G_1M} - (5\overrightarrow{G_1A} + \overrightarrow{G_1B}) = 4\overrightarrow{G_1M}$,
d'où :

$$\begin{aligned}\|4\overrightarrow{G_1M}\| &= 2AB \\ 4G_1M &= 2AB \\ G_1M &= \frac{AB}{2}\end{aligned}$$

\mathcal{E}_1 est le cercle de centre G_1 et de rayon $\frac{AB}{2}$.

2. Soit \mathcal{E}_2 : $\|4\overrightarrow{AM} + 3\overrightarrow{BM}\| = 7 AM$.

On pose $G_2 = \text{bar}\{(A; 4), (B; 3)\}$, alors $\overrightarrow{AG_2} = \frac{3}{7}\overrightarrow{AB}$.

De plus $4\overrightarrow{AM} + 3\overrightarrow{BM} = 4(\overrightarrow{AG_2} + \overrightarrow{G_2M}) + 3(\overrightarrow{BG_2} + \overrightarrow{G_2M}) = 7\overrightarrow{G_2M} - (4\overrightarrow{G_2A} + 3\overrightarrow{G_2B}) = 7\overrightarrow{G_2M}$,
d'où :

$$\begin{aligned}\|7\overrightarrow{G_2M}\| &= 7AM \\ G_2M &= AM\end{aligned}$$

\mathcal{E}_2 est la médiatrice du segment $[G_2A]$.

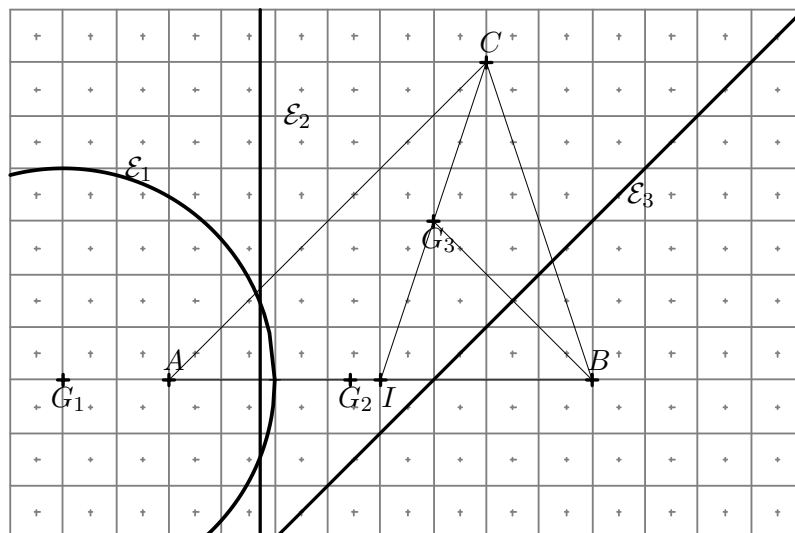
3. Soit \mathcal{E}_3 : $\|\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM} + 2\overrightarrow{CM}\| = 4 BM$.

On pose $G_3 = \text{bar}\{(A; 1), (B; 1), (C; 2)\}$, alors si I est le milieu de $[AB]$, G_3 est le milieu de $[IC]$.

De plus $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM} + 2\overrightarrow{CM} = (\overrightarrow{AG_3} + \overrightarrow{G_3M}) + (\overrightarrow{BG_3} + \overrightarrow{G_3M}) + 2(\overrightarrow{CG_3} + \overrightarrow{G_3M}) = 4\overrightarrow{G_3M} - (\overrightarrow{G_3A} + \overrightarrow{G_3B} + 2\overrightarrow{G_3C}) = 4\overrightarrow{G_3M}$, d'où :

$$\begin{aligned}\|4\overrightarrow{G_3M}\| &= 4BM \\ G_3M &= BM\end{aligned}$$

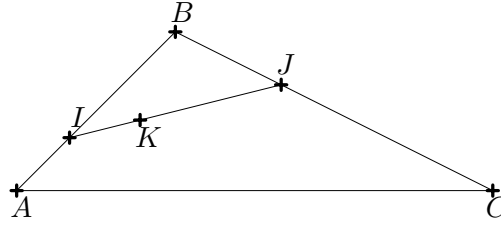
\mathcal{E}_3 est la médiatrice du segment $[G_3B]$.



Problème

1. Étude d'un cas particulier

1.1 On considère le cas particulier où $t = \frac{1}{3}$:



1.2 On utilise la relation de Chasles :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{BJ} &= \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} & \overrightarrow{IK} &= \frac{1}{3}\overrightarrow{IJ} \\ \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AJ} &= \frac{1}{3}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) & \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AK} &= \frac{1}{3}(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AJ}) \\ \overrightarrow{AJ} &= \frac{1}{3}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BA} & \overrightarrow{AK} &= \frac{1}{3}\overrightarrow{IA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AJ} - \overrightarrow{IA} \\ \overrightarrow{AJ} &= \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} & \overrightarrow{AK} &= \frac{2}{3}\overrightarrow{AI} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AJ} \end{aligned}$$

1.3 On utilise les résultats précédents :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AK} &= \frac{2}{3}\overrightarrow{AI} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AJ} \\ \overrightarrow{AK} &= \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\right) \\ \overrightarrow{AK} &= \frac{2}{9}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{9}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{9}\overrightarrow{AC} \\ \overrightarrow{AK} &= \frac{4}{9}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{9}\overrightarrow{AC} \end{aligned}$$

1.4 On utilise à nouveau la relation de Chasles :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AK} &= \frac{4}{9}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{9}\overrightarrow{AC} \\ \overrightarrow{AK} &= \frac{4}{9}(\overrightarrow{AK} + \overrightarrow{KB}) + \frac{1}{9}(\overrightarrow{AK} + \overrightarrow{KC}) \\ \overrightarrow{AK} &= \frac{5}{9}\overrightarrow{AK} + \frac{4}{9}\overrightarrow{KB} + \frac{1}{9}\overrightarrow{KC} \\ \overrightarrow{AK} - \frac{5}{9}\overrightarrow{AK} - \frac{4}{9}\overrightarrow{KB} - \frac{1}{9}\overrightarrow{KC} &= \overrightarrow{0} \\ -\frac{4}{9}\overrightarrow{KA} - \frac{4}{9}\overrightarrow{KB} - \frac{1}{9}\overrightarrow{KC} &= \overrightarrow{0} \\ \frac{4}{9}\overrightarrow{KA} + \frac{4}{9}\overrightarrow{KB} + \frac{1}{9}\overrightarrow{KC} &= \overrightarrow{0} \end{aligned}$$

Donc :

$$K = \text{bar}\left\{\left(A; \frac{4}{9}\right), \left(B; \frac{4}{9}\right), \left(C; \frac{1}{9}\right)\right\}$$

2. Étude du cas général

t est un réel quelconque de l'intervalle $[0; 1]$.

2.1 On utilise la relation de Chasles :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{BJ} &= t\overrightarrow{BC} & \overrightarrow{IK} &= t\overrightarrow{IJ} \\ \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AJ} &= t(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) & \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AK} &= t(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AJ}) \\ \overrightarrow{AJ} &= t\overrightarrow{BA} + t\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BA} & \overrightarrow{AK} &= t\overrightarrow{IA} + t\overrightarrow{AJ} - \overrightarrow{IA} \\ \overrightarrow{AJ} &= (1-t)\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC} & \overrightarrow{AK} &= (1-t)\overrightarrow{AI} + t\overrightarrow{AJ} \end{aligned}$$

2.2 On utilise les résultats précédents :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AK} &= (1-t)\overrightarrow{AI} + t\overrightarrow{AJ} \\ \overrightarrow{AK} &= (1-t)(t\overrightarrow{AB}) + t((1-t)\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC}) \\ \overrightarrow{AK} &= (1-t)t\overrightarrow{AB} + t(1-t)\overrightarrow{AB} + t^2\overrightarrow{AC} \\ \overrightarrow{AK} &= 2t(1-t)\overrightarrow{AB} + t^2\overrightarrow{AC} \end{aligned}$$

2.3 On utilise à nouveau la relation de Chasles :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AK} &= 2t(1-t)\overrightarrow{AB} + t^2\overrightarrow{AC} \\ \overrightarrow{AK} &= 2t(1-t)(\overrightarrow{AK} + \overrightarrow{KB}) + t^2(\overrightarrow{AK} + \overrightarrow{KC}) \\ \overrightarrow{AK} &= (2t(1-t) + t^2)\overrightarrow{AK} + 2t(1-t)\overrightarrow{KB} + t^2\overrightarrow{KC} \\ \overrightarrow{AK} - (2t - t^2)\overrightarrow{AK} - 2t(1-t)\overrightarrow{KB} - t^2\overrightarrow{KC} &= \overrightarrow{0} \\ (-1 + 2t - t^2)\overrightarrow{KA} - 2t(1-t)\overrightarrow{KB} - t^2\overrightarrow{KC} &= \overrightarrow{0} \\ (1-t)^2\overrightarrow{KA} + 2t(1-t)\overrightarrow{KB} + t^2\overrightarrow{KC} &= \overrightarrow{0} \end{aligned}$$

Donc :

$$K = \text{bar}\{(A; (1-t)^2), (B; 2t(1-t)), (C; t^2)\}$$

3. Figure

