Barycentre et coordonnées cartésiennes

Coordonnées cartésiennes d'un barycentre

On considère trois points A, B et C de l'Espace et on définit le barycentre :

$$G = \text{bar}\{(A;\alpha),(B;\beta),(C;\gamma)\} \qquad \text{avec} \qquad \alpha+\beta+\gamma \neq 0$$

On définit à présent un repère de l'Espace $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ dans lequel les coordonnées des points A, B, C et G sont notées :

$$A(x_A;y_A;z_A) \qquad B(x_B;y_B;z_B) \qquad C(x_C;y_C;z_C) \qquad G(x_G;y_G;z_G)$$

1. Écrire la relation vectorielle définissant le point G.
2. Interpréter cette relation en termes de coordonnées de vecteurs dans le repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$, en déduire les formules des coordonnées du barycentre :

$$x_G = \frac{\alpha x_A + \beta x_B + \gamma x_C}{\alpha+\beta+\gamma} \qquad y_G = \frac{\alpha y_A + \beta y_B + \gamma y_C}{\alpha+\beta+\gamma} \qquad z_G = \frac{\alpha z_A + \beta z_B + \gamma z_C}{\alpha+\beta+\gamma}$$

Centre de gravité d'un tétraèdre

On considère un tétraèdre $ABCD$ et on définit les points G_1, G_2, G_3 et G_4 centres de gravité respectifs des triangles BCD, ACD, ABD et ABC. L'Espace est muni du repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$.

1. Faire une figure en perspective.
2. Calculer les coordonnées des points A, B, C, D, G_1, G_2, G_3 et G_4 dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$.
3. On définit les points $I = \text{bar}\{(A;1)(G_1;3)\}$, $J = \text{bar}\{(B;1)(G_2;3)\}$, $K = \text{bar}\{(C;1)(G_3;3)\}$ et $L = \text{bar}\{(D;1)(G_4;3)\}$.
   (a) Calculer les coordonnées des points I, J, K, et L dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$.
   (b) Quelle propriété du tétraèdre peut-on en déduire ?

Démonstrations utilisant les coordonnées cartésiennes

En utilisant dans chaque cas un repère de l'Espace convenablement choisi, démontrer les résultats suivants :

1. Les diagonales d'un cube se coupent en leurs milieux.
2. La longueur d'une diagonale d'un cube de côté a est $a\sqrt{3}$.
3. Les droites joignant les centres de gravité des faces d'un tétraèdre sont chacune parallèles à une des arêtes.