Formule de Taylor

Dérivée k-ième d'une fonction

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, on dit que f est deux fois dérivable sur I si sa fonction dérivée f' est dérivable, la fonction dérivée de f' est appelée dérivée seconde de f et notée f''.

De manière générale, si la fonction f est k fois dérivable sur I, on peut définir sa dérivée k-ième que l'on note $f^{(k)}$.

On considère la fonction $f(x) = 3 + 7x + 5x^2$.

1. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa fonction dérivée f'.
2. Montrer que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa fonction dérivée seconde f''.
3. Montrer que f est trois fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa fonction dérivée troisième f'''.
4. Montrer que la fonction f est infiniment dérivable. Calculer ses dérivées k-ièmes $f^{(k)}$ pour $k \geqslant 4$.

Formule de Taylor pour une fonction trinôme

On considère une fonction trinôme $f(x) = a + bx + cx^2$.

1. Montrer que la fonction f est infiniment dérivable et calculer ses dérivées successives $f^{(k)}$.
2. Exprimer les valeurs $f^{(k)}(0)$ des dérivées successives en $x = 0$ en fonction de a, b et c.
3. Démontrer la formule de Taylor du trinôme :

$$f(x) = f(0) + f'(0)\ x + \frac{f''(0)}{2}\ x^2$$

Formule de Taylor pour une fonction polynôme

1. On considère une fonction polynôme de degré 3, $f(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$. Prouver que cette fonction est infiniment dérivable, exprimer les valeurs $f^{(k)}(0)$ en fonction de a, b, c et d et en déduire la formule de Taylor pour une fonction polynôme de degré 3.
2. Déterminer la formule de Taylor pour une fonction polynôme de degré 4, $f(x) = a+bx+cx^2+dx^3+ex^4$.
3. On considère la fonction $g(x) = x^n$. Montrer que cette fonction est infiniment dérivable, calculer g', g'' et g''' et par généralisation montrer que :

   $$g^{(n)}(x) = n \times (n-1) \times \cdots \times 3 \times 2 \times 1$$

   En déduire que les valeurs $g^{(k)}(0)$ des dérivées successives de la fonction g en $x = 0$ sont toutes nulles à l'exception de $g^{(n)}(0) = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times (n-1) \times n$.

   Démontrer alors la formule de Taylor pour un polynome de degré n :

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1}\ x + \frac{f''(0)}{1 \times 2}\ x^2 + \frac{f'''(0)}{1 \times 2 \times 3}\ x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times (n-1) \times n}\ x^n$$