

Devoir surveillé de mathématiques n°6

Questions de Cours

1. Rédiger l'énoncé ainsi que la démonstration du théorème de dérivation de la fonction inverse.
2. Rédiger l'énoncé ainsi que la démonstration du théorème de dérivation du quotient de deux fonctions.

Exercice 1

Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer l'ensemble de définition ainsi que le ou les intervalles sur le(s)quel(s) la fonction est dérivable puis exprimer la fonction dérivée (expliciter les étapes de calcul) :

$$f_1(x) = (x^2 - 5) \cos x \quad f_2(x) = \frac{x^2 + 1}{2x - 5} \quad f_3(x) = \sqrt{4x - 3} \quad f_4(x) = \frac{1}{x^2 - 4}$$

Exercice 2

On considère la fonction $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 5$.

1. Prouver que la fonction f est définie et dérivable sur \mathbb{R} et exprimer $f'(x)$.
2. Étudier le signe de $f'(x)$.
3. Dresser le tableau de variations de la fonction f .

Exercice 3

On considère la fonction $g(x) = \frac{x + 2}{x + 1}$.

1. Étudier la dérivabilité ainsi que les variations de la fonction g .
2. On appelle \mathcal{C}_g la courbe représentative de la fonction g .
 - (a) Déterminer les coordonnées du point d'intersection A de \mathcal{C}_g avec l'axe des ordonnées puis donner une équation de la tangente T_A à la courbe \mathcal{C}_g en A .
 - (b) Déterminer les coordonnées du point d'intersection B de \mathcal{C}_g avec l'axe des abscisses puis donner une équation de la tangente T_B à la courbe \mathcal{C}_g en B .
 - (c) Tracer dans un même repère T_A , T_B et \mathcal{C}_g .

Exercice 4 (Inégalité de Bernoulli)

1. On considère la fonction $f(x) = (1+x)^n$; $n \in \mathbb{N}^*$.
 - (a) Montrer que la fonction f est définie et dérivable sur l'intervalle $[0; +\infty[$ et calculer $f'(x)$.
 - (b) Déterminer le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[0; +\infty[$.
 - (c) En déduire que pour tout $x \geq 0$ on a $(1+x)^n \geq 1$.
2. On considère la fonction $g(x) = (1+x)^n - 1 - nx$; $n \in \mathbb{N}^*$.
 - (a) Montrer que la fonction g est définie et dérivable sur l'intervalle $[0; +\infty[$ et calculer $g'(x)$.
 - (b) Prouver que $g'(x) \geq 0$ pour $x \in [0; +\infty[$, déterminer le tableau de variations de la fonction g sur l'intervalle $[0; +\infty[$.
 - (c) En déduire que pour tout $x \geq 0$ on a $(1+x)^n \geq 1 + nx$.

Exercice 5 (Construction géométrique d'une tangente à une parabole)

On rappelle que si f est une fonction définie et dérivable sur un intervalle I de \mathbb{R} avec $x_0 \in I$, l'équation réduite de la tangente au point $M_0(x_0; f(x_0))$ est $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.

Dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) du plan, on considère une parabole d'équation $y = ax^2$ avec $a \in \mathbb{R}$. Étant donné un point $M_0(x_0; y_0)$ de la parabole, on définit le point P , intersection de l'axe des ordonnées avec la droite parallèle à l'axe des abscisses passant par le point M_0 et le point N , intersection de l'axe des ordonnées avec la tangente à la parabole en M_0 .

1. Faire une figure à main levée.
2. Exprimer l'équation réduite de la tangente à la parabole en M_0 , montrer que l'ordonnée à l'origine de cette tangente est $-ax_0^2$.
3. Déterminer les coordonnées des points P et N dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) , en déduire que le point O est le milieu du segment $[PN]$.
4. Définir une méthode géométrique de construction de la tangente en un point quelconque d'une parabole.