

Correction du devoir surveillé de mathématiques n°6

Exercice 1

1. On pose $f_1 = uv$ avec $u(x) = x^2 - 5$ et $v(x) = \cos x$. Les fonctions u et v sont définies et dérivables sur \mathbb{R} avec $u'(x) = 2x$ et $v'(x) = -\sin x$. Donc f_1 est définie et dérivable sur \mathbb{R} avec $f'_1 = u'v + uv'$:

$$f'_1(x) = 2x \cos x - (x^2 - 5) \sin x$$

2. On pose $f_2 = \frac{u}{v}$ avec $u(x) = x^2 + 1$ et $v(x) = 2x - 5$. Les fonctions u et v sont définies et dérivables sur \mathbb{R} avec $u'(x) = 2x$ et $v'(x) = 2$. De plus v ne s'annule pas si on se restreint à $\mathbb{R} - \{\frac{5}{2}\}$. Donc f_2 est définie sur $\mathbb{R} - \{\frac{5}{2}\}$ et dérivable sur $] -\infty; \frac{5}{2}[$ et $]\frac{5}{2}; +\infty[$ avec $f'_2 = \frac{u'v - uv'}{v^2}$:

$$f'_2(x) = \frac{2x(2x - 5) - 2(x^2 + 1)}{(2x - 5)^2} = \frac{2x^2 - 10x - 2}{(2x - 5)^2}$$

3. On pose $f_3 = u(ax + b)$ avec $u(x) = \sqrt{x}$ et $a = 4$, $b = -3$. La fonction u est définie sur \mathbb{R}_+ et dérivable sur \mathbb{R}_+^* avec $u'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. Donc f_3 est définie sur $]\frac{3}{4}; +\infty[$ et dérivable sur $]\frac{3}{4}; +\infty[$ avec $f'_3(x) = au'(ax + b)$:

$$f'_3(x) = \frac{4}{2\sqrt{4x - 3}} = \frac{2}{\sqrt{4x - 3}}$$

4. On pose $f_4 = \frac{1}{u}$ avec $u(x) = x^2 - 4$. La fonction u est définie et dérivable sur \mathbb{R} avec $u'(x) = 2x$. De plus u ne s'annule pas si on se restreint à $\mathbb{R} - \{-2; 2\}$. Donc f_4 est définie sur $\mathbb{R} - \{-2; 2\}$ et dérivable sur $] -\infty; -2[$, $] -2; 2[$ et $]2; +\infty[$ avec $f'_4 = -\frac{u'}{u^2}$:

$$f'_4(x) = \frac{-2x}{(x^2 - 4)^2}$$

Exercice 2

1. La fonction f est une fonction polynôme donc elle est définie et dérivable sur \mathbb{R} et :

$$f'(x) = 2 \times 3x^2 - 3 \times 2x - 12 = 6(x^2 - x - 2)$$

2. Le trinôme $x^2 - x - 2$ se factorise sous la forme $(x + 1)(x - 2)$ donc f' s'annule pour les racines -1 et 2 , est négative sur $] -1; 2[$ et positive sur $] -\infty; -1[\cup]2; +\infty[$.
3. Le tableau de variations de la fonction f est donc :

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$		
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		\nearrow	12	\searrow	-15	\nearrow

Exercice 3

1. On pose $g = \frac{u}{v}$ avec $u(x) = x + 2$ et $v(x) = x + 1$. Les fonctions u et v sont définies et dérivables sur \mathbb{R} avec $u'(x) = 1$ et $v'(x) = 1$. De plus v ne s'annule pas si on se restreint à $\mathbb{R} - \{-1\}$. Donc g est définie sur $\mathbb{R} - \{-1\}$ et dérivable sur $] - \infty; -1[$ et $] - 1; +\infty[$ avec $g' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$:

$$g'(x) = \frac{(x+1) - (x+2)}{(x+1)^2} = \frac{-1}{(x+1)^2}$$

La fonction g' est négative, le tableau de variations de la fonction g est donc :

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$g(x)$	\searrow	\parallel	\searrow

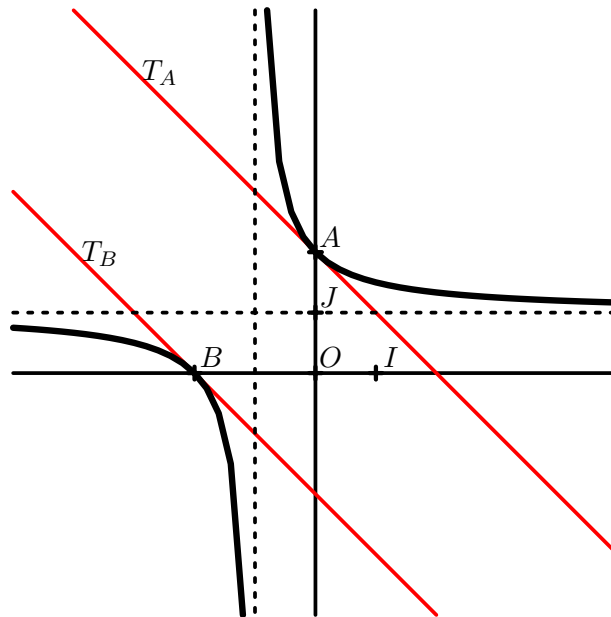
2. (a) On a $x_A = 0$ donc $y_A = g(0) = 2$. De plus l'équation de la tangente T_A à la courbe \mathcal{C}_g en A est :

$$y = g(x_A) + g'(x_A)(x - x_A) = g(0) + g'(0)(x - 0) = 2 - 1(x - 0) = -x + 2$$

- (b) On a $y_B = 0$ donc $g(x_B) = 0$ et $x_B = -2$. De plus l'équation de la tangente T_B à la courbe \mathcal{C}_g en B est :

$$y = g(x_B) + g'(x_B)(x - x_B) = g(-2) + g'(-2)(x + 2) = 0 - 1(x + 2) = -x - 2$$

- (c) La courbe représentative \mathcal{C}_g de la fonction g dans un repère orthonormé est :



Exercice 4 (Inégalité de Bernoulli)

1. (a) La fonction f est une fonction polynôme donc elle est définie et dérivable sur \mathbb{R} et *a fortiori* sur l'intervalle $[0; +\infty[$. De plus $f(x) = u(ax + b)$ avec $u(x) = x^n$ et $a = 1$, $b = 1$ donc $f'(x) = au'(ax + b)$:

$$f'(x) = n(1+x)^{n-1}$$

- (b) La fonction f' est positive sur l'intervalle $[0; +\infty[$ donc la fonction f est croissante sur l'intervalle $[0; +\infty[$.
- (c) On en déduit que pour tout $x \geq 0$ on a $f(x) \geq f(0)$ soit $(1+x)^n \geq 1$.

2. (a) La fonction g est une fonction polynôme donc elle est définie et dérivable sur \mathbb{R} et *a fortiori* sur l'intervalle $[0; +\infty[$. De plus $g(x) = f(x) - 1 - nx$ donc $g'(x) = f'(x) - n$:

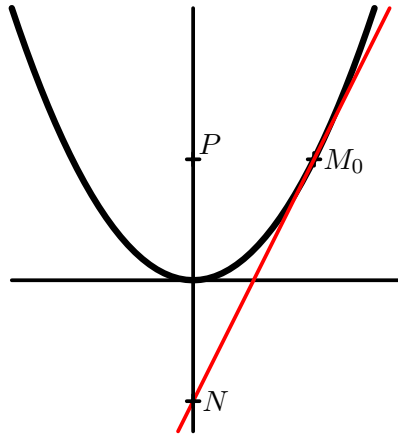
$$g'(x) = n(1+x)^{n-1} - n = n((1+x)^{n-1} - 1)$$

- (b) D'après la question 1.c, on sait que $(1+x)^n \geq 1$ pour $x \geq 0$. Ce résultat étant vrai pour tout entier n , on a donc $(1+x)^{n-1} \geq 1$ pour $x \geq 0$. Par conséquent $g'(x) \geq 0$ pour $x \in [0; +\infty[$, la fonction g est croissante sur l'intervalle $[0; +\infty[$.
- (c) On en déduit que pour tout $x \geq 0$ on a $g(x) \geq g(0)$ soit $(1+x)^n - 1 - nx \geq 0$ et finalement :

$$(1+x)^n \geq 1 + nx$$

Exercice 5 (Construction géométrique d'une tangente à une parabole)

1. La figure est :



2. L'équation réduite de la tangente à la parabole en M_0 est :

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = ax_0^2 + 2ax_0(x - x_0) = 2ax_0x - ax_0^2$$

Le coefficient directeur de cette tangente est $2ax_0$ et son ordonnée à l'origine $-ax_0^2$.

3. Les coordonnées du point P sont $P(0; y_0)$ soit $P(0, ax_0^2)$ et d'après la question précédente, les coordonnées du point N sont $N(0; -ax_0^2)$. Le point O est donc le milieu du segment $[NP]$.
4. Pour construire la tangente en un point quelconque M_0 d'une parabole, il suffit de tracer la droite passant par le point M_0 et par le symétrique du point P par rapport au point O .