Correction du devoir surveillé de mathématiques n°6

Exercice 1

1. On pose $f_1 = uv$ avec $u(x) = x^2 - 3$ et $v(x) = \sin x$. Les fonctions u et v sont définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ avec $u'(x) = 2x$ et $v'(x) = \cos x$. Donc f_1 est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $f_1' = u'v + uv'$:
$$f_1'(x) = 2x \sin x + (x^2 - 3)\cos x$$
2. On pose $f_2 = \frac{u}{v}$ avec $u(x) = x^2 - 1$ et $v(x) = 2x + 3$. Les fonctions u et v sont définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ avec $u'(x) = 2x$ et $v'(x) = 2$. De plus v ne s'annule pas si on se restreint à $\mathbb{R} - \{-\frac{3}{2}\}$. Donc f_2 est définie sur $\mathbb{R} - \{-\frac{3}{2}\}$ et dérivable sur $]-\infty; -\frac{3}{2}[$ et $]-\frac{3}{2}; +\infty[$ avec $f_2' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$:
$$f_2'(x) = \frac{2x(2x+3) - 2(x^2-1)}{(2x+3)^2} = \frac{2x^2 + 6x + 2}{(2x+3)^2}$$
3. On pose $f_3 = u(ax+b)$ avec $u(x) = \sqrt{x}$ et $a = 3$, $b = -4$. La fonction u est définie sur $\mathbb{R}_+$ et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ avec $u'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. Donc f_3 est définie sur $[\frac{4}{3}; +\infty[$ et dérivable sur $]\frac{4}{3}; +\infty[$ avec $f_3'(x) = au'(ax+b)$:
$$f_3'(x) = \frac{3}{2\sqrt{3x+4}}$$
4. On pose $f_4 = \frac{1}{u}$ avec $u(x) = x^2 - 9$. La fonction u est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $u'(x) = 2x$. De plus u ne s'annule pas si on se restreint à $\mathbb{R} - \{-3; 3\}$. Donc f_4 est définie $\mathbb{R} - \{-3; 3\}$ et dérivable sur les intervalles $]-\infty; -3[$, $]-3; 3[$ et $]3; +\infty[$ avec $f_4' = -\frac{u'}{u^2}$:
$$f_4'(x) = \frac{-2x}{(x^2-9)^2}$$

Exercice 2

1. La fonction f est une fonction polynôme donc elle est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et :
$$f'(x) = 2 \times 3x^2 + 3 \times 2x - 12 = 6(x^2 + x - 2)$$
2. Le trinôme $x^2 + x - 2$ se factorise sous la forme $(x+2)(x-1)$ donc f' s'annule pour les racines -2 et 1, est négative sur $]-2; 1[$ et positive sur $]-\infty; -2[\cup]1; +\infty[$.
3. Le tableau de variations de la fonction f est donc :

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	13	$\searrow$	-14	$\nearrow$	

Exercice 3

1. On pose $g = \frac{u}{v}$ avec $u(x) = x - 2$ et $v(x) = x - 1$. Les fonctions u et v sont définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ avec $u'(x) = 1$ et $v'(x) = 1$. De plus v ne s'annule pas si on se restreint à $\mathbb{R} - \{1\}$. Donc g est définie sur $\mathbb{R} - \{1\}$ et dérivable sur $]-\infty; 1[$ et $]1; +\infty[$ avec $g' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$:

$$g'(x) = \frac{(x-1) - (x-2)}{(x-1)^2} = \frac{1}{(x-1)^2}$$

La fonction g' est positive, le tableau de variations de la fonction g est donc :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$g(x)$		$\nearrow$	$\|\|$	$\nearrow$	

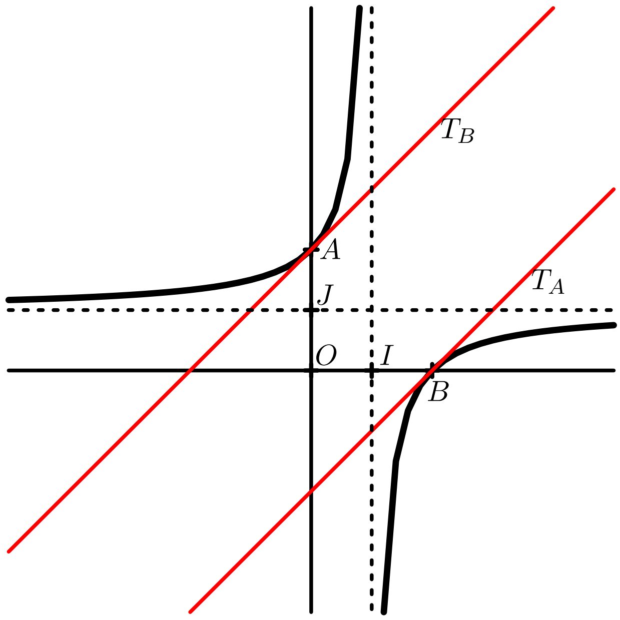
2. (a) On a $x_A = 0$ donc $y_A = g(0) = 2$. De plus l'équation de la tangente T_A à la courbe $\mathcal{C}_g$ en A est :

$$y = g(x_A) + g'(x_A)(x - x_A) = g(0) + g'(0)(x - 0) = 2 + 1(x - 0) = x + 2$$

(b) On a $y_B = 0$ donc $g(x_B) = 0$ et $x_B = 2$. De plus l'équation de la tangente T_B à la courbe $\mathcal{C}_g$ en B est :

$$y = g(x_B) + g'(x_B)(x - x_B) = g(2) + g'(2)(x - 2) = 0 + 1(x - 2) = x - 2$$

(c) La courbe représentative $\mathcal{C}_g$ de la fonction g dans un repère orthonormé est :



Exercice 4 (Inégalité de Bernoulli)

1. (a) La fonction f est une fonction polynôme donc elle est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et *a fortiori* sur l'intervalle $[0; +\infty[$. De plus $f(x) = u(ax + b)$ avec $u(x) = x^n$ et $a = 1$, $b = 1$ donc $f'(x) = au'(ax + b)$:

$$f'(x) = n(1 + x)^{n-1}$$

(b) La fonction f' est positive sur l'intervalle $[0; +\infty[$ donc la fonction f est croissante sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

(c) On en déduit que pour tout $x \geqslant 0$ on a $f(x) \geqslant f(0)$ soit $(1 + x)^n \geqslant 1$.

2. (a) La fonction g est une fonction polynôme donc elle est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et *a fortiori* sur l'intervalle $[0;+\infty[$. De plus $g(x) = f(x) - 1 - nx$ donc $g'(x) = f'(x) - n$:

$$g'(x) = n(1+x)^{n-1} - n = n((1+x)^{n-1} - 1)$$

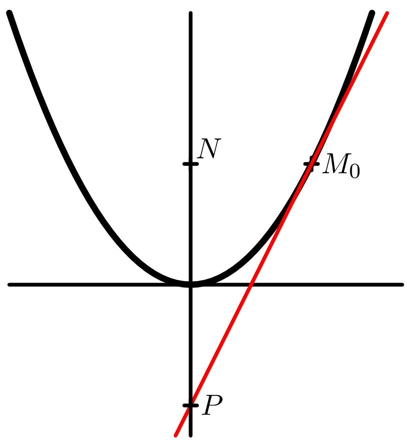
(b) D'après la question 1.c, on sait que $(1+x)^n \geqslant 1$ pour $x \geqslant 0$. Ce résultat étant vrai pour tout entier n, on a donc $(1+x)^{n-1} \geqslant 1$ pour $x \geqslant 0$. Par conséquent $g'(x) \geqslant 0$ pour $x \in [0;+\infty[$, la fonction g est croissante sur l'intervalle $[0;+\infty[$.

(c) On en déduit que pour tout $x \geqslant 0$ on a $g(x) \geqslant g(0)$ soit $(1+x)^n - 1 - nx \geqslant 0$ et finalement :

$$(1+x)^n \geqslant 1 + nx$$

Exercice 5 **(Construction géométrique d'une tangente à une parabole)**

1. La figure est :



2. L'équation réduite de la tangente à la parabole en M_0 est :

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = ax_0^2 + 2ax_0(x - x_0) = 2ax_0x - ax_0^2$$

Le coefficient directeur de cette tangente est $2ax_0$ et son ordonnée à l'origine $-ax_0^2$.

3. Les coordonnées du point N sont $N(0;y_0)$ soit $N(0, ax_0^2)$ et d'après la question précédente, les coordonnées du point P sont $P(0;-ax_0^2)$. Le point O est donc le milieu du segment $[NP]$.

4. Pour construire la tangente en un point quelconque M_0 d'une parabole, il suffit de tracer la droite passant par le point M_0 et par le symétrique du point N par rapport au point O.