Bilinéarité du Produit Scalaire

Le but de l'activité est de démontrer les propriétés de bilinéarité du Produit Scalaire :

$$
\begin{aligned}
(k\overrightarrow{u}).\overrightarrow{v} &= k(\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}) && (1)\\
\overrightarrow{u}.(k\overrightarrow{v}) &= k(\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}) && (2)\\
(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}).\overrightarrow{w} &= \overrightarrow{u}.\overrightarrow{w}+\overrightarrow{v}.\overrightarrow{w} && (3)\\
\overrightarrow{u}.(\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w}) &= \overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}+\overrightarrow{u}.\overrightarrow{w} && (4)
\end{aligned}
$$

Lemme préliminaire

Lemme. *Soit ABC un triangle et H le projeté orthogonal du point B sur la droite AC, alors :*

$$\overrightarrow{AB}\ .\ \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AH}\ .\ \overrightarrow{AC}$$

1. Faire une figure avec un triangle ABC aigu en A puis avec un triangle ABC obtus en A.
2. Prouver que $AH = AB \times \cos(\widehat{BAH})$.
3. Démontrer le lemme pour un triangle ABC aigu en A puis pour un triangle ABC obtus en A.

Preuve des propriétés de bilinéarité du Produit Scalaire

1. Prouver les propriétés (1) et (2).
2. Prouver les propriétés (3) et (4) lorsque l'un au moins des trois vecteurs est nul.
3. Soient $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs non nuls du plan, on pose $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{BC}$. On appelle B' et C' les projetés orthogonaux respectifs sur la droite (OA) des points B et C.
   On pose $\overrightarrow{B'C'} = \lambda\ \overrightarrow{OB'}$.
   (a) Faire une figure.
   (b) Prouver que $\overrightarrow{u}.(\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w}) = \overrightarrow{OA}\ .\ \overrightarrow{OC'}$ puis que $\overrightarrow{u}.(\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w}) = (1+\lambda)\ \overrightarrow{OA}\ .\ \overrightarrow{OB'}$.
   (c) Montrer que $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}+\overrightarrow{u}.\overrightarrow{w} = \overrightarrow{OA}\ .\ \overrightarrow{OB'}+\overrightarrow{OA}\ .\ \overrightarrow{B'C'}$ puis que $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}+\overrightarrow{u}.\overrightarrow{w} = (1+\lambda)\ \overrightarrow{OA}\ .\ \overrightarrow{OB'}$.
   (d) En déduire que $\overrightarrow{u}.(\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w}) = \overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}+\overrightarrow{u}.\overrightarrow{w}$.
4. Prouver que $(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}).\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u}.\overrightarrow{w}+\overrightarrow{v}.\overrightarrow{w}$.

Expressions du produit scalaire en fonction de la norme

Prouver les résultats suivants :

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} &= \frac{1}{2}\left(||\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}||^2 - ||\overrightarrow{u}||^2 - ||\overrightarrow{v}||^2\right)\\
\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} &= \frac{1}{2}\left(||\overrightarrow{u}||^2 + ||\overrightarrow{v}||^2 - ||\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}||^2\right)\\
\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} &= \frac{1}{4}\left(||\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}||^2 - ||\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}||^2\right)
\end{aligned}
$$