Formules trigonométriques

Le but de l'activité est de démontrer les formules trigonométriques suivantes :

1. Formules d'addition

$$\begin{aligned} \cos(a+b) &= \cos a \cos b - \sin a \sin b & (1)\\ \cos(a-b) &= \cos a \cos b + \sin a \sin b & (2)\\ \sin(a+b) &= \sin a \cos b + \cos a \sin b & (3)\\ \sin(a-b) &= \sin a \cos b - \cos a \sin b & (4) \end{aligned}$$

2. Formules de duplication

$$\begin{aligned} \cos(2a) &= \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a & (5)\\ \sin(2a) &= 2 \sin a \cos a & (6) \end{aligned}$$

Preuve des formules trigonométriques d'addition et de duplication

1. On considère le plan orienté muni d'un repère orthonormal $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ et du cercle trigonométrique. Soient a et b deux nombres réels.
   (a) Placer les points A et B de coordonnées polaires $A(1;-a)$ et $B(1;b)$.
   (b) Prouver que $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = a + b\ [2\pi]$, en déduire que $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \cos(a+b)$.
   (c) Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$, en déduire que $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \cos a \cos b - \sin a \sin b$.
   (d) Conclure.
2. Prouver la formule (2).
3. En remarquant que $\sin(a+b) = \cos[(\frac{\pi}{2} - a) - b]$, démontrer la formule (3).
4. Prouver la formule (4).
5. Prouver les formules (5) et (6).

Calcul de valeurs exactes du cosinus et sinus de certains angles

1. Démontrer les formules de linéarisation :

$$\begin{aligned} \cos^2 a &= \frac{1+\cos(2a)}{2}\\ \sin^2 a &= \frac{1-\cos(2a)}{2} \end{aligned}$$

2. Calculer les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{8}$ et $\sin\frac{\pi}{8}$.
3. (a) Calculer la valeur exacte de $\cos\frac{\pi}{12}$ à l'aide des formules de linéarisation.
   (b) En remarquant que $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$, calculer la valeur exacte de $\cos\frac{\pi}{12}$ à l'aide de la formule (2).
   (c) Que penser de ces deux résultats ?