

Produit scalaire et lieux géométriques

Le but de l'activité est de déterminer quelques exemples de lieux géométriques en utilisant le produit scalaire. On considère deux points du plan A et B tels que $AB = 4$ cm et on appelle I le milieu du segment $[AB]$.

Lieu géométrique des points M vérifiant $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = 12$.

1. Étant donné un point M quelconque du plan et H son projeté orthogonal sur la droite (AB) , montrer en utilisant la relation de Chasles que $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AB}$.
2. Étant donné un point M du plan vérifiant $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = 12$, déterminer son projeté orthogonal H sur la droite (AB) .
3. En déduire l'ensemble des points M du plan vérifiant $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = 12$.

Lieu géométrique des points M vérifiant $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 5$.

1. Étant donné un point M quelconque du plan, montrer en utilisant la relation de Chasles que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 - IA^2$.
2. En déduire l'ensemble des points M du plan vérifiant $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 5$.

Lieu géométrique des points M vérifiant $MA^2 + MB^2 = 10$.

1. Étant donné un point M quelconque du plan, montrer en utilisant la relation de Chasles que $MA^2 + MB^2 = 2(MI^2 + IA^2)$.
2. En déduire l'ensemble des points M du plan vérifiant $MA^2 + MB^2 = 10$.

Lieu géométrique des points M vérifiant $MA^2 - MB^2 = -16$.

1. Étant donné un point M quelconque du plan, montrer en utilisant la relation de Chasles que $MA^2 - MB^2 = 2\overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{AB}$.
2. En déduire l'ensemble des points M du plan vérifiant $MA^2 - MB^2 = -16$. (on pourra s'inspirer de la méthode utilisée pour caractériser le lieu géométrique défini par $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = 12$)