Un problème de géométrie analytique

Problème

On considère un carré $ABCD$ et on note I, J, K et L les milieux respectifs des côtés $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[AD]$. On appelle P le point d'intersection des droites (CI) et (DJ), Q le point d'intersection des droites (DJ) et (AK), R le point d'intersection des droites (AK) et (BL) et S le point d'intersection des droites (BL) et (CI).

Le but de ce problème est de démontrer que le quadrilatère $PQRS$ est un carré dont l'aire est égale au cinquième de celle du carré $ABCD$.

Dans tout le problème, le plan est muni du repère orthonormé $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$.

1. Faire une figure.
2. Déterminer les coordonnées des points A, B, C, D, I, J, K et L.
3. Déterminer les équations des droites (AK), (BL), (CI) et (DJ).
4. En déduire les coordonnées des points P, Q, R et S.
5. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{PS}$, $\overrightarrow{QR}$ et $\overrightarrow{PQ}$.
6. En déduire la nature du quadrilatère $PQRS$.
7. Calculer l'aire du quadrilatère $PQRS$.

Problème généralisé

1. Étudier le problème du même type obtenu en considérant les points I, J, K et L définis par :
$$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} \qquad \overrightarrow{BJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} \qquad \overrightarrow{CK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CD} \qquad \overrightarrow{DL} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DA}$$
2. Étudier le cas général obtenu en considérant les points I, J, K et L définis par :
$$\overrightarrow{AI} = \alpha\,\overrightarrow{AB} \qquad \overrightarrow{BJ} = \alpha\,\overrightarrow{BC} \qquad \overrightarrow{CK} = \alpha\,\overrightarrow{CD} \qquad \overrightarrow{DL} = \alpha\,\overrightarrow{DA}$$