

## Devoir maison n°7

### Exercice 1

1. Démontrer que pour tout  $x \neq k\frac{\pi}{2}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  :

$$\frac{\sin 3x}{\sin x} - \frac{\cos 3x}{\cos x} = 2$$

2. Démontrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on a  $\cos x + \sqrt{3}\sin x = 2\cos(x - \frac{\pi}{3})$ .  
Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation  $\cos x + \sqrt{3}\sin x = -2$ .

### Exercice 2

On considère un triangle  $ABC$  d'aire  $5 \text{ cm}^2$  tel que  $AB = 13 \text{ cm}$  et  $AC = 2 \text{ cm}$ .  
Calculer la (les) longueur(s) possible(s) du troisième côté.

### Exercice 3

1. Démontrer en utilisant une (ou des) formule(s) trigonométrique(s) adaptée(s) que :

$$\sin \frac{5\pi}{12} = \frac{1}{4}(\sqrt{2} + \sqrt{6})$$

2. On considère un triangle  $ABC$  tel que  $BC = 4$ ,  $\widehat{B} = \frac{\pi}{4}$  et  $\widehat{C} = \frac{\pi}{3}$ . Démontrer que :

$$AB = \frac{8\sqrt{3}}{\sqrt{2} + \sqrt{6}} \quad AC = \frac{8\sqrt{2}}{\sqrt{2} + \sqrt{6}}$$

### Exercice 4

On considère deux points  $A$  et  $B$  du plan avec  $AB = 6 \text{ cm}$ . Déterminer les lieux géométriques suivants :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} &= 0 \\ \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{AB} &= 12 \\ MA^2 + MB^2 &= 26 \\ MA^2 - MB^2 &= 18 \end{aligned}$$

**Exercice 5\***

On considère un quadrilatère convexe  $ABCD$  et on appelle  $O$  le point d'intersection des ses diagonales.

Démontrer que son aire est égale à :

$$\frac{1}{2} \times AC \times BD \times \sin \widehat{AOB}$$

**Exercice 6\* (formule de Héron)**

On considère un triangle quelconque  $ABC$  et on pose  $BC = a$ ,  $AC = b$  et  $AB = c$ . On note  $p = \frac{a+b+c}{2}$  le demi-périmètre. Le but de l'exercice est d'exprimer l'aire  $S$  du triangle  $ABC$  en fonction de  $a$ ,  $b$  et  $c$ .

1. Prouver que  $\cos \widehat{A} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ .
2. En déduire que  $\sin^2 \widehat{A} = \frac{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}{4b^2c^2}$ .
3. Prouver que  $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ .

**Exercice 7\*\***

Démontrer que dans un triangle, la somme des carrés des longueurs des médianes est égale aux trois quarts de la somme des carrés des longueurs des côtés.

**Exercice 8\*\***

On considère deux points  $A$  et  $B$  du plan tels que  $AB = 4$  cm. Déterminer l'ensemble des points  $M$  du plan vérifiant la relation  $MA^2 + 3MB^2 = 16$ .