Corrigé du devoir maison n°7

Exercice 1

1. Pour $x \neq k\frac{\pi}{2}$, $\sin x$ et $\cos x$ ne s'annulent pas :
$$\frac{\sin 3x}{\sin x} - \frac{\cos 3x}{\cos x} = \frac{\sin 3x \cos x - \sin x \cos 3x}{\sin x \cos x} = \frac{\sin(3x - x)}{\sin x \cos x} = \frac{\sin 2x}{\sin x \cos x} = \frac{2 \sin x \cos x}{\sin x \cos x} = 2$$
2. Pour $x \in \mathbb{R}$, on a :
$$2\cos(x - \frac{\pi}{3}) = 2(\cos x \cos\frac{\pi}{3} + \sin x \sin\frac{\pi}{3}) = 2(\frac{1}{2}\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x) = \cos x + \sqrt{3}\sin x$$
D'où :
$$\begin{array}{rcl} \cos x + \sqrt{3}\sin x & = & -2 \\ 2\cos(x - \frac{\pi}{3}) & = & -2 \\ \cos(x - \frac{\pi}{3}) & = & -1 \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} x - \frac{\pi}{3} & = & \pi \ [2\pi] \\ x & = & \pi + \frac{\pi}{3} \ [2\pi] \\ x & = & \frac{4\pi}{3} \ [2\pi] \end{array}$$

Exercice 2

L'aire du triangle ABC est égale à $\frac{1}{2}AB \times AC \times \sin\widehat{A}$, d'où $\sin\widehat{A} = \frac{5 \times 2}{13 \times 2} = \frac{5}{13}$.

Il existe deux angles $\widehat{A}$ solution dont un angle aigu et un angle obtus. De plus :
$$\cos^2\widehat{A} = 1 - \sin^2\widehat{A} = 1 - \frac{25}{169} = \frac{144}{169} = \left(\frac{12}{13}\right)^2$$
Les cosinus des deux angles solution sont donc respectivement $\frac{12}{13}$ et $-\frac{12}{13}$.

D'après la formule d'Al-Kashi :
$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \times \cos\widehat{A}$$
On obtient donc deux valeurs possibles pour la longueur BC :
$$\begin{array}{rcl} BC^2 & = & 13^2 + 2^2 - 2 \times 13 \times 2 \times \frac{12}{13} \\ BC^2 & = & 125 \\ BC & = & 5\sqrt{5} \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} BC^2 & = & 13^2 + 2^2 - 2 \times 13 \times 2 \times \left(-\frac{12}{13}\right) \\ BC^2 & = & 221 \\ BC & = & \sqrt{221} \end{array}$$

Exercice 3

1. On remarque que :
$$\sin\frac{5\pi}{12} = \sin(\pi - \frac{7\pi}{12}) = \sin\frac{7\pi}{12} = \sin(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4})$$
D'où :
$$\sin\frac{5\pi}{12} = \sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}(\sqrt{2} + \sqrt{6})$$

2. On utilise la formule des sinus :

$$\frac{BC}{\sin \widehat{A}} = \frac{AC}{\sin \widehat{B}} = \frac{AB}{\sin \widehat{C}}$$

D'où :

$$\frac{4}{\sin \frac{5\pi}{12}} = \frac{AC}{\sin \frac{\pi}{4}} = \frac{AB}{\sin \frac{\pi}{3}}$$

On obtient donc :

$$\begin{aligned} AB &= \frac{4\sin\frac{\pi}{3}}{\sin\frac{5\pi}{12}} = \frac{4 \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{4}(\sqrt{2}+\sqrt{6})} = \frac{8\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{6}} \\ AC &= \frac{4\sin\frac{\pi}{4}}{\sin\frac{5\pi}{12}} = \frac{4 \times \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{4}(\sqrt{2}+\sqrt{6})} = \frac{8\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{6}} \end{aligned}$$

A noter que des simplifications sont possibles :

$$\begin{aligned} AB &= \frac{8\sqrt{3}(\sqrt{2}-\sqrt{6})}{(\sqrt{2}+\sqrt{6})(\sqrt{2}-\sqrt{6})} = \frac{8\sqrt{6}-24\sqrt{2}}{2-6} = 6\sqrt{2}-2\sqrt{6} \\ AC &= \frac{8}{1+\sqrt{3}} = \frac{8(1-\sqrt{3})}{(1+\sqrt{3})(1-\sqrt{3})} = \frac{8-8\sqrt{3}}{1-3} = 4\sqrt{3}-4 \end{aligned}$$

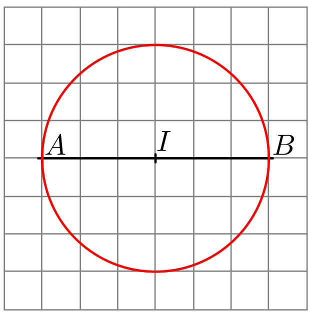
Exercice 4

On appelle I le milieu du segment $[AB]$.

1. On remarque que :

$$\overrightarrow{MA} \,.\, \overrightarrow{MB} = (\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}) \,.\, (\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}) = (\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}) \,.\, (\overrightarrow{MI}-\overrightarrow{IA}) = \overrightarrow{MI}^2 - \overrightarrow{IA}^2 = MI^2 - IA^2$$

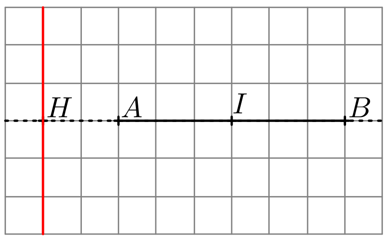
D'où $MI^2 - 9 = 0$ et $MI = 3$, l'ensemble des points M est le cercle de centre I et de rayon 3 cm autrement dit le cercle de diamètre $[AB]$.



2. On appelle H le projeté orthogonal du point M sur la droite (AB) , on remarque que :

$$\overrightarrow{MA} \,.\, \overrightarrow{AB} = (\overrightarrow{MH}+\overrightarrow{HA}) \,.\, \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{HA} \,.\, \overrightarrow{AB} \quad \text{(car les vecteurs } \overrightarrow{MH} \text{ et } \overrightarrow{AB} \text{ sont orthogonaux)}$$

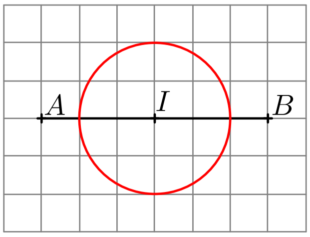
Il existe un unique point H appartenant à la droite (AB) tel que les vecteurs $\overrightarrow{HA}$ et $\overrightarrow{AB}$ soient colinéaires de même sens avec $AH = \frac{12}{6} = 2$ cm. L'ensemble des points M est la droite perpendiculaire à la droite (AB) en H.



3. On remarque que :

$$\begin{aligned} MA^2 + MB^2 &= \overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 + (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2 = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 + (\overrightarrow{MI} - \overrightarrow{IA})^2 \\ MA^2 + MB^2 &= \overrightarrow{MI}^2 + 2\overrightarrow{MI}\ .\ \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IA}^2 + \overrightarrow{MI}^2 - 2\overrightarrow{MI}\ .\ \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IA}^2 = 2MI^2 + 2IA^2 \end{aligned}$$

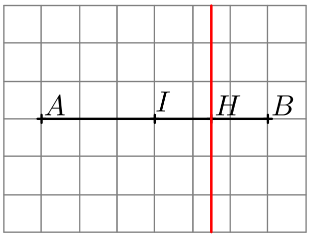
D'où $2MI^2 + 18 = 26$ et $MI = 2$, l'ensemble des points M est le cercle de centre I et de rayon 2 cm.



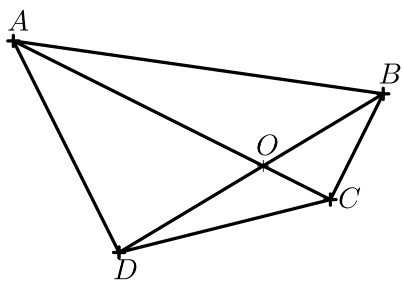
4. On remarque que :

$$\begin{aligned} MA^2 - MB^2 &= \overrightarrow{MA}^2 - \overrightarrow{MB}^2 = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 - (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2 = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 - (\overrightarrow{MI} - \overrightarrow{IA})^2 \\ MA^2 - MB^2 &= \overrightarrow{MI}^2 + 2\overrightarrow{MI}\ .\ \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IA}^2 - \overrightarrow{MI}^2 + 2\overrightarrow{MI}\ .\ \overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IA}^2 = 4\overrightarrow{MI}\ .\ \overrightarrow{IA} \end{aligned}$$

On appelle H le projeté orthogonal du point M sur la droite (AB) , on obtient que $4\overrightarrow{HI}\ .\ \overrightarrow{IA} = 18$. Il existe un unique point H appartenant à la droite (AB) tel que les vecteurs $\overrightarrow{HI}$ et $\overrightarrow{IA}$ soient colinéaires de même sens avec $IH = \frac{3}{2} = 1,5$ cm, c'est le milieu du segment $[IB]$. L'ensemble des points M est la médiatrice du segment $[IB]$.



Exercice 5



$$\begin{aligned} \text{Aire}(ABCD) &= \text{Aire}(AOB) + \text{Aire}(BOC) + \text{Aire}(COD) + \text{Aire}(AOD) \\ \text{Aire}(ABCD) &= \frac{1}{2}OA.OB.\sin\widehat{AOB} + \frac{1}{2}OB.OC.\sin\widehat{BOC} + \frac{1}{2}OC.OD.\sin\widehat{COD} + \frac{1}{2}OA.OD.\sin\widehat{AOD} \end{aligned}$$

Les angles $\widehat{AOB}$, $\widehat{BOC}$, $\widehat{COD}$ et $\widehat{AOD}$ sont égaux ou supplémentaires donc leurs sinus sont égaux :

$$\begin{aligned} \text{Aire}(ABCD) &= \frac{1}{2}OA.OB.\sin\widehat{AOB} + \frac{1}{2}OB.OC.\sin\widehat{AOB} + \frac{1}{2}OC.OD.\sin\widehat{AOB} + \frac{1}{2}OA.OD.\sin\widehat{AOB} \\ \text{Aire}(ABCD) &= \frac{1}{2}\sin\widehat{AOB}(OA.OB + OB.OC + OC.OD + OA.OD) \\ \text{Aire}(ABCD) &= \frac{1}{2}\sin\widehat{AOB}(OA + OC)(OB + OD) \\ \text{Aire}(ABCD) &= \frac{1}{2}AC.BD.\sin\widehat{AOB} \end{aligned}$$

Exercice 6 (formule de Héron)

1. D'après la formule d'Al-Kashi $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{A}$, on obtient donc $\cos\widehat{A} = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$.
2. On a $\sin^2\widehat{A} = 1 - \cos^2\widehat{A}$ donc :

$$\sin^2\widehat{A} = 1 - \left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)^2 = 1 - \frac{(b^2+c^2-a^2)^2}{4b^2c^2} = \frac{(2bc)^2-(b^2+c^2-a^2)^2}{4b^2c^2}$$

$$\sin^2\widehat{A} = \frac{(2bc-b^2-c^2+a^2)(2bc+b^2+c^2-a^2)}{4b^2c^2} = \frac{(a^2-(b-c)^2)((b+c)^2-a^2)}{4b^2c^2}$$

$$\sin^2\widehat{A} = \frac{(a-b+c)(a+b-c)(b+c-a)(b+c+a)}{4b^2c^2} = \frac{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}{4b^2c^2}$$

3. L'expression précédente peut également s'écrire :

$$\sin^2\widehat{A} = \frac{2p\times 2(p-a)\times 2(p-b)\times 2(p-c)}{4b^2c^2} = \frac{4p(p-a)(p-b)(p-c)}{b^2c^2}$$

Donc :

$$S = \frac{1}{2}bc\sin\widehat{A} = \frac{1}{2}bc\sqrt{\frac{4p(p-a)(p-b)(p-c)}{b^2c^2}} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Exercice 7

On considère un triangle quelconque ABC et on note I, J et K les milieux respectifs des côtés $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$. D'après la formule de la médiane :

$$\begin{aligned} 2AI^2 &= AB^2 + AC^2 - \frac{1}{2}BC^2 \\ 2BJ^2 &= BA^2 + BC^2 - \frac{1}{2}AC^2 \\ 2CK^2 &= CA^2 + CB^2 - \frac{1}{2}AB^2 \end{aligned}$$

En sommant ces trois égalités, on obtient :

$$2(AI^2+BJ^2+CK^2) = (1+1-\frac{1}{2})(AB^2+AC^2+BC^2) = \frac{3}{2}(AB^2+AC^2+BC^2)$$

D'où le résultat final $AI^2+BJ^2+CK^2 = \dfrac{3}{4}(AB^2+AC^2+BC^2)$.

Exercice 8

On note $G = \text{bar}\{(A,1);(B,3)\}$, on a $\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{0}$, or :

$$\begin{aligned} MA^2+3MB^2 &= \overrightarrow{MA}^2 + 3\overrightarrow{MB}^2 = (\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA})^2 + 3(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GB})^2 \\ MA^2+3MB^2 &= \overrightarrow{MG}^2 + 2\overrightarrow{MG}\,.\,\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GA}^2 + 3(\overrightarrow{MG}^2 + 2\overrightarrow{MG}\,.\,\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GB}^2) \\ MA^2+3MB^2 &= 4MG^2 + GA^2 + 3GB^2 + 2\overrightarrow{MG}\,.\,(\overrightarrow{GA}+3\overrightarrow{GB}) = 4MG^2+GA^2+3GB^2 \end{aligned}$$

D'où $16 = 4MG^2 + 9 + 3$ et $MG = 1$, l'ensemble des points M est le cercle de centre G et de rayon 1 autrement dit le cercle de centre G passant par le point B.