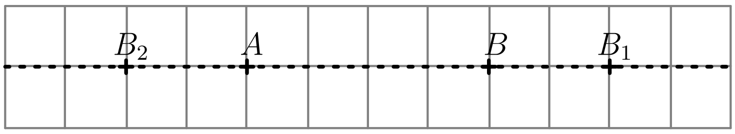
Homothéties

Définition. *Soit I un point du plan (ou de l'espace) et k un nombre réel non nul, on appelle* homothétie *de* centre *I et de* rapport *k la transformation qui à tout point M du plan (ou de l'espace) associe le point M' défini par :*

$$\overrightarrow{IM'} = k\overrightarrow{IM}$$

Exemples. *On considère un segment $[AB]$ de longueur 4 cm, contruire le point B_1 image du point B par l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{3}{2}$ ainsi que le point B_2 image du point B par l'homothétie de centre A et de rapport $-\frac{1}{2}$.*



Cas particuliers. *Si $k = 1$ l'homothétie est la transformation identité, si $k = -1$ l'homothétie est une symétrie centrale de centre I.*

Propriété. *Si le point M' est l'image d'un point M par une homothétie de centre I alors les points I, M et M' sont alignés.*

Démonstration. D'après la définition on a $\overrightarrow{IM'} = k\overrightarrow{IM}$ donc les vecteurs $\overrightarrow{IM'}$ et $\overrightarrow{IM}$ sont colinéaires, les points I, M et M' sont donc alignés. $\square$

Propriété. *Une homothétie de rapport différent de 1 admet pour seul point invariant son centre.*

Démonstration. Le point M est invariant par l'homothétie de centre I et de rapport k si son image M' est le point M lui-même. On a donc $\overrightarrow{IM} = k\overrightarrow{IM}$ soit $(1-k)\overrightarrow{IM} = \overrightarrow{0}$. Comme $k \neq 1$, cette égalité équivaut à $\overrightarrow{IM} = \overrightarrow{0}$ soit $M = I$. $\square$

Théorème fondamental des homothéties. *On considère une homothétie de centre I et de rapport $k \neq 0$ ainsi que deux points M et M d'images respectives M' et N', alors :*

$$\overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN}$$

Démonstration. On utilise la définition des points M' et N' , $\overrightarrow{IM'} = k\overrightarrow{IM}$ et $\overrightarrow{IN'} = k\overrightarrow{IN}$ d'où :
$\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{M'I} + \overrightarrow{IN'} = -\overrightarrow{IM'} + \overrightarrow{IN'} = -k\overrightarrow{IM} + k\overrightarrow{IN} = k\overrightarrow{MI} + k\overrightarrow{IN} = k(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IN}) = k\overrightarrow{MN}$ $\square$

Théorème 1. *Les homothéties conservent les barycentres et donc en particulier les milieux et centres de gravité.*

Démonstration. On considère une homothétie de rapport k et $G = bar\{(A;\alpha),(B;\beta),(C;\gamma)\}$, on note G', A', B' et C' les images respectives des points G, A, B et C par l'homothétie de rapport k. Alors :

$$\begin{aligned}
\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\gamma\overrightarrow{GC} &= \overrightarrow{0}\\
k\times(\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\gamma\overrightarrow{GC}) &= \overrightarrow{0}\\
\alpha(k\overrightarrow{GA})+\beta(k\overrightarrow{GB})+\gamma(k\overrightarrow{GC}) &= \overrightarrow{0}\\
\alpha\overrightarrow{G'A'}+\beta\overrightarrow{G'B'}+\gamma\overrightarrow{G'C'} &= \overrightarrow{0}
\end{aligned}$$

Donc $G' = bar\{(A';\alpha),(B';\beta),(C';\gamma)\}$. □

Théorème 2. *Les homothéties conservent les angles orientés et donc en particulier l'alignement, le parallélisme et l'orthogonalité.*

Démonstration. On considère une homothétie de rapport $k \neq 0$ et trois points A, B et C d'images respectives A', B' et C'.

Si $k > 0$ alors $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) = (k\overrightarrow{AB},k\overrightarrow{AC})[2\pi] = (\overrightarrow{A'B'},\overrightarrow{A'C'})[2\pi]$.

Si $k < 0$ alors $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) = (k\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})+\pi[2\pi] = (k\overrightarrow{AB},k\overrightarrow{AC})+\pi+\pi[2\pi] = (\overrightarrow{A'B'},\overrightarrow{A'C'})[2\pi]$.
□

Théorème 3. *Une homothétie de rapport k multiplie les longueurs par $|k|$.*

Démonstration. On considère une homothétie de rapport $k \neq 0$ ainsi que deux points M et M d'images respectives M' et N', alors $\overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN}$ d'où $M'N' = |k| \times MN$. □

Propriétés.
- *L'image d'une droite $\mathcal{D}$ par une homothétie est une droite parallèle à $\mathcal{D}$.*
- *L'image d'un plan $\mathcal{P}$ par une homothétie est un plan parallèle à $\mathcal{P}$.*
- *L'image d'un cercle de centre O et de rayon R par une homothétie de rapport k est un cercle de rayon $|k| \times R$ dont le centre est l'image O' du point O par cette homothétie.*
- *L'image d'une sphère de centre O et de rayon R par une homothétie de rapport k est une sphère de rayon $|k| \times R$ dont le centre est l'image O' du point O par cette homothétie.*

Démonstration. La démonstration (admise) utilise les théorèmes 1,2 et 3. □