Inégalité de Bienaymé-Tchébychev

Un cas particulier

On considère une série statistique de N valeurs x_i et on note $\overline{x}$ sa moyenne et s son écart-type. Nous allons prouver que moins d'un quart des valeurs de la série sont éloignées de plus de $2s$ de la moyenne $\overline{x}$.

1. Prouver que si une valeur x_i n'appartient pas à l'intervalle $[\overline{x} - 2s; \overline{x} + 2s]$ alors $(x_i - \overline{x})^2 > 4s^2$.
2. On appelle p le nombre de valeurs n'appartenant pas à l'intervalle $[\overline{x} - 2s; \overline{x} + 2s]$, prouver que :

$$\sum_{i=1}^{i=N} (x_i - \overline{x})^2 > 4ps^2$$

3. On rappelle que $s = \sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{i=N} (x_i - \overline{x})^2}{N}}$, démontrer que $p < \dfrac{N}{4}$. Conclure.
4. On considère un devoir de Mathématiques dont la moyenne est $11,5$ et l'écart-type $3,8$. Quel est le plus petit intervalle centré autour de la moyenne contenant au moins les trois quarts des notes ?

Cas général

On considère une série statistique de N valeurs x_i et on note $\overline{x}$ sa moyenne et s son écart-type. Nous allons prouver que le nombre de valeurs n'appartenant pas à l'intervalle $[\overline{x} - ks; \overline{x} + ks]$ est inférieur à $\dfrac{N}{k^2}$.

1. Prouver que si une valeur x_i n'appartient pas à l'intervalle $[\overline{x} - ks; \overline{x} + ks]$ alors $(x_i - \overline{x})^2 > k^2s^2$.
2. On appelle p le nombre de valeurs n'appartenant pas à l'intervalle $[\overline{x} - ks; \overline{x} + ks]$, prouver que :

$$\sum_{i=1}^{i=N} (x_i - \overline{x})^2 > pk^2s^2$$

3. Démontrer que $p < \dfrac{N}{k^2}$. Conclure.

Interprétation probabiliste

On considère un devoir de Mathématiques dont la moyenne est 11 et l'écart-type 2 et on choisit une copie au hasard, que peut-on dire de la probabilité :

- que la note appartienne à l'intervalle $[7; 15]$?
- que la note appartienne à l'intervalle $[5; 17]$?
- que la note appartienne à l'intervalle $[3; 19]$?
- que la note appartienne à l'intervalle $[8; 14]$?
- que la note appartienne à l'intervalle $[6; 16]$?