

## Inégalité de Bienaymé-Tchébychev

### Un cas particulier

On considère une série statistique de  $N$  valeurs  $x_i$  et on note  $\bar{x}$  sa moyenne et  $s$  son écart-type. Nous allons prouver que moins d'un quart des valeurs de la série sont éloignées de plus de  $2s$  de la moyenne  $\bar{x}$ .

1. Prouver que si une valeur  $x_i$  n'appartient pas à l'intervalle  $[\bar{x} - 2s; \bar{x} + 2s]$  alors  $(x_i - \bar{x})^2 > 4s^2$ .
2. On appelle  $p$  le nombre de valeurs n'appartenant pas à l'intervalle  $[\bar{x} - 2s; \bar{x} + 2s]$ , prouver que :

$$\sum_{i=1}^{i=N} (x_i - \bar{x})^2 > 4ps^2$$

3. On rappelle que  $s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{i=N} (x_i - \bar{x})^2}{N}}$ , démontrer que  $p < \frac{N}{4}$ . Conclure.

4. On considère un devoir de Mathématiques dont la moyenne est 11,5 et l'écart-type 3,8. Quel est le plus petit intervalle centré autour de la moyenne contenant au moins les trois quarts des notes ?

### Cas général

On considère une série statistique de  $N$  valeurs  $x_i$  et on note  $\bar{x}$  sa moyenne et  $s$  son écart-type. Nous allons prouver que le nombre de valeurs n'appartenant pas à l'intervalle  $[\bar{x} - ks; \bar{x} + ks]$  est inférieur à  $\frac{N}{k^2}$ .

1. Prouver que si une valeur  $x_i$  n'appartient pas à l'intervalle  $[\bar{x} - ks; \bar{x} + ks]$  alors  $(x_i - \bar{x})^2 > k^2s^2$ .
2. On appelle  $p$  le nombre de valeurs n'appartenant pas à l'intervalle  $[\bar{x} - ks; \bar{x} + ks]$ , prouver que :

$$\sum_{i=1}^{i=N} (x_i - \bar{x})^2 > pk^2s^2$$

3. Démontrer que  $p < \frac{N}{k^2}$ . Conclure.

### Interprétation probabiliste

On considère un devoir de Mathématiques dont la moyenne est 11 et l'écart-type 2 et on choisit une copie au hasard, que peut-on dire de la probabilité :

- que la note appartienne à l'intervalle  $[7; 15]$  ?
- que la note appartienne à l'intervalle  $[5; 17]$  ?
- que la note appartienne à l'intervalle  $[3; 19]$  ?
- que la note appartienne à l'intervalle  $[8; 14]$  ?
- que la note appartienne à l'intervalle  $[6; 16]$  ?