Algorithme de Héron

Le but de l'activité est d'étudier l'algorithme de Héron qui permet de calculer des approximations rationnelles des racines carrées de nombres entiers.

Approximations rationnelles de $\sqrt{2}$

On considère la suite $(u_k)_{k \geqslant 1}$ définie par la relation de récurrence :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} u_1 & = & 1 \\ u_{k+1} & = & \dfrac{u_k^2 + 2}{2u_k} \quad , \quad k \geqslant 1 \end{array} \right.$$

1. Calculer la valeur exacte de u_2 et u_3 puis une valeur approchée au millième de u_4 et u_5.
2. Construire la représentation graphique de la fonction $f(x) = \dfrac{x^2 + 2}{2x} \quad , \quad x \geqslant 0$ dans un repère orthonormal avec pour unité 10 cm. Tracer dans ce repère la droite d'équation $y = x$ puis placer les points $M_1(u_1; u_2)$, $M_2(u_2; u_3)$, $M_3(u_3; u_4)$ et $M_4(u_4; u_5)$.
3. Vers quel point semble converger la suite de points $(M_k)_{k \geqslant 1}$? Calculer les coordonnées de ce point et en déduire la limite de la suite $(u_k)_{k \geqslant 1}$. (on ne demande pas de prouver la convergence)
4. Calculer les valeurs exactes de u_4 et u_5 et donner leur précision en tant qu'approximations de $\sqrt{2}$.

Approximations rationnelles de $\sqrt{n} \quad , \quad n \geqslant 2$

On considère la suite $(u_k)_{k \geqslant 1}$ définie par la relation de récurrence :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} u_1 & = & 1 \\ u_{k+1} & = & \dfrac{u_k^2 + n}{2u_k} \quad , \quad k \geqslant 1 \end{array} \right.$$

1. On admet que la suite $(u_k)_{k \geqslant 1}$ converge comme précédemment, calculer sa limite.
2. Calculer une valeur approchée rationnelle au millième de $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ et $\sqrt{7}$.