Devoir surveillé de mathématiques n°9

Exercice 1

On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par la forme explicite $u_n = 4n - 5 \quad , \quad n \geqslant 0$.

1. Calculer les quatre premiers termes de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$.
2. Prouver que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite arithmétique dont on déterminera le terme initial ainsi que la raison.
3. Étudier le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$.
4. Calculer la somme $S = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{84} + u_{85}$.

Exercice 2

On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $u_0 = 9$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{3} \quad , \quad n \geqslant 0$.

1. Calculer les quatre premiers termes de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$.
2. Montrer que la suite suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est géométrique, en déduire sa forme explicite.
3. Déterminer le rang du terme $\dfrac{1}{59049}$.
4. Calculer la somme $S = 9 + 3 + 1 + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{9} + \cdots + \dfrac{1}{59049}$.

Exercice 3

Étudier le sens de variation et la convergence des suites ci-dessous :

1. $u_n = \left(\dfrac{3}{4}\right)^n \quad , \quad n \geqslant 0$.
2. $u_n = 1 - \dfrac{1}{n} \quad , \quad n \geqslant 1$.

Exercice 4

On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par la forme explicite $u_n = \dfrac{2n-1}{3n+2} \quad , \quad n \geqslant 0$.

1. Calculer les quatre premiers termes de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$.
2. Prouver que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est croissante.
3. Prouver que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est convergente et calculer sa limite.

Exercice 5

On considère une suite arithmétique $(u_n)_{n\geqslant 0}$ telle que $u_9 = 9,4$ et $u_{17} = 22,2$.

1. Déterminer le terme initial et la raison de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$.
2. Déterminer la forme explicite de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$.
3. Calculer le terme u_{51}.