Correction du devoir surveillé de mathématiques n°9

Exercice 1

1. $u_0 = -5$, $u_1 = -1$, $u_2 = 3$, $u_3 = 7$.
2. $u_{n+1} - u_n = [4(n+1) - 5] - [4n - 5] = 4$ donc la suite est arithmétique de terme initial $u_0 = -5$ et de raison 4.
3. La suite est arithmétique de raison positive donc elle est croissante.
4. $S = \dfrac{\text{nombre de termes} \times (\text{premier terme} + \text{dernier terme})}{2} = \dfrac{86 \times (-5 + 335)}{2} = 14190$.

Exercice 2

1. $u_0 = 9$, $u_1 = 3$, $u_2 = 1$, $u_3 = \dfrac{1}{3}$.
2. $u_{n+1} = \dfrac{1}{3} u_n$ donc la suite est géométrique de terme initial $u_0 = 9$ et de raison $\dfrac{1}{3}$ d'où $u_n = 9 \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^n = \dfrac{1}{3^{n-2}}$.
3. On remarque que $59049 = 3^{10}$, le terme est donc de rang $10 + 2 = 12$.
4. $S = \dfrac{\text{premier terme} - \text{raison} \times \text{dernier terme}}{1 - \text{raison}} = \dfrac{9 - \frac{1}{3} \times \frac{1}{3^{10}}}{1 - \frac{1}{3}} = \dfrac{27}{2} - \dfrac{1}{2 \times 3^{10}}$.

Exercice 3

1. La suite est géométrique de terme initial $u_0 = 1$ et de raison $r = \dfrac{3}{4}$, comme $u_0 > 0$ et $0 < r < 1$ la suite est décroissante et converge vers 0.
2. $u_{n+1} - u_n = \left(1 - \dfrac{1}{n+1}\right) - \left(1 - \dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{1}{n(n+1)} > 0$ donc la suite est croissante, de plus $\left(\dfrac{1}{n}\right)_{n \geqslant 1}$ converge vers 0 donc la suite $(u_n)_{n \geqslant 1}$ converge vers $1 - 0 = 1$.

Exercice 4

1. $u_0 = -\dfrac{1}{2}$, $u_1 = \dfrac{1}{5}$, $u_2 = \dfrac{3}{8}$, $u_3 = \dfrac{5}{11}$.
2. $u_{n+1} - u_n = \dfrac{2(n+1) - 1}{3(n+1) + 2} - \dfrac{2n - 1}{3n + 2} = \dfrac{7}{(3n+5)(3n+2)} > 0$ donc la suite est croissante.
3. Pour $n \geqslant 1$ on a $u_n = \dfrac{n(2 - \frac{1}{n})}{n(3 + \frac{2}{n})} = \dfrac{2 - \frac{1}{n}}{3 + \frac{2}{n}}$, le numérateur converge vers 2 et le dénominateur vers 3 donc la suite converge vers $\dfrac{2}{3}$.

Exercice 5

1. la raison de la suite est $r = \dfrac{22,2 - 9,4}{17 - 9} = 1,6$ et le premier terme $u_0 = u_9 - 9 \times r = 9,4 - 9 \times 1,6 = -5$.
2. La forme explicite de la suite est $u_n = u_0 + n \times r = -5 + 1,6n$.
3. $u_{51} = -5 + 1,6 \times 51 = 76,6$.