Suites numériques

1 Notion de suite

Définition 1. *Une suite numérique (u_n) est une fonction définie sur l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$ ou sur une partie de $\mathbb{N}$ et à valeurs dans l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$.*

$$\begin{array}{rccc} u: & \mathbb{N} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & n & \mapsto & u(n) = u_n \end{array}$$

Exercice 1.

1. *On considère la suite définie par la **forme explicite** : $v_n = n^2 - 5$, $n \geqslant 1$. Calculer v_1, v_2 et v_3.*
2. *On considère la suite définie par la **relation de récurrence** : $w_{n+1} = w_n - 2$, $n \geqslant 0$ et la donnée du premier terme : $w_0 = 4$. Calculer w_1, w_2 et w_3.*

2 Sens de variation d'une suite

Définition 2. *Une suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est **croissante** si pour tout entier $n \geqslant 0$ alors $u_{n+1} \geqslant u_n$.*

Exemple 1. *La suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ définie précédemment est croissante.*

Définition 3. *Une suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est **décroissante** si pour tout entier $n \geqslant 0$ alors $u_{n+1} \leqslant u_n$.*

Exemple 2. *La suite $(w_n)_{n\geqslant 0}$ définie précédemment est décroissante.*

Définition 4. *Une suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est **constante** si pour tout entier $n \geqslant 0$ alors $u_{n+1} = u_n$.*

Remarque 1. *Une suite constante est à la fois croissante et décroissante.*

Remarque 2. *Pour connaître le sens de variation d'une suite, on étudie le signe de $u_{n+1} - u_n$.*

3 Suites arithmétiques et géométriques

3.1 Suites arithmétiques

Définition 5. *On appelle **suite arithmétique** de premier terme u_0 et de **raison** $a \in \mathbb{R}$ une suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant pour tout entier $n \geqslant 0$:* $\boxed{u_{n+1} = u_n + a}$.

Exemple 3. *La suite des nombres pairs est une suite arithmétique de premier terme 0 et de raison 2.*

Propriété 1. *Une suite arithmétique de raison* $a \in \mathbb{R}$ *est croissante si* $a > 0$ *et décroissante si* $a < 0$ *, elle est constante si* $a = 0$ *.*

Démonstration. La suite (u_n) est définie par la relations de récurrence $u_{n+1} = u_n + a$ donc $u_{n+1} - u_n = a$. Si $a > 0$ alors $u_{n+1} \geqslant u_n$ et la suite est croissante, si $a < 0$ alors $u_{n+1} \leqslant u_n$ et la suite est décroissante, enfin si $a = 0$ alors $u_{n+1} = u_n$ et la suite est constante. □

Propriété 2. *Une suite arithmétique de premier terme* u_0 *et de raison* $a \in \mathbb{R}$ *vérifie la relation* $\boxed{u_n = u_0 + na}$ *pour tout* $n \geqslant 0$ *.*

Démonstration. Admis. □

Remarque 3. *Il faut savoir adapter la formule précédente dans le cas où le premier terme n'est pas* u_0 *, par exemple :* $u_n = u_3 + (n-3)a$ *pour* $n \geqslant 3$*.*

Exercice 2. *Calculer le terme d'indice* 21 *d'un suite arithmétique de raison* 3 *dont le terme d'indice* 7 *vaut* -1*.*

3.2 Suites géométriques

Définition 6. *On appelle* ***suite géométrique*** *de premier terme* u_0 *et de* ***raison*** $r \in \mathbb{R}_+^*$ *une suite* $(u_n)_{n\geqslant 0}$ *vérifiant pour tout entier* $n \geqslant 0$ *:* $\boxed{u_{n+1} = r \times u_n}$ *.*

Exemple 4. *La suite des puissances de deux est une suite géométrique de premier terme 1 et de raison 2.*

Propriété 3. *Une suite géométrique strictement positive de raison* r *est croissante si* $r > 1$ *et décroissante si* $0 < r < 1$ *, elle est constante si* $r = 1$*.*

Démonstration. La suite étant strictement positive, $r \in \mathbb{R}_+^*$. La suite (u_n) est définie par la relation de récurrence $u_{n+1} = r \times u_n$ donc $\frac{u_{n+1}}{u_n} = r$. Si $r > 1$ alors $u_{n+1} \geqslant u_n$ et la suite est croissante, si $0 < r < 1$ alors $u_{n+1} \leqslant u_n$ et la suite est décroissante, enfin si $r = 1$ alors $u_{n+1} = u_n$ et la suite est constante. □

Propriété 4. *Une suite géométrique de premier terme* u_0 *et de raison* $r \in \mathbb{R}_+^*$ *vérifie la relation* $\boxed{u_n = u_0 \times r^n}$ *pour tout* $n \geqslant 0$ *.*

Démonstration. Admis. □

Remarque 4. *Il faut savoir adapter la formule précédente dans le cas où le premier terme n'est pas* u_0 *, par exemple :* $u_n = u_3 \times r^{n-3}$ *pour* $n \geqslant 3$ *.*

Exercice 3. *Calculer le terme d'indice* 21 *d'un suite géométrique de raison* 2 *dont le terme d'indice* 7 *vaut* 3*.*