# Suites numériques

## 1 Notion de suite

**Définition 1.** *Une suite numérique* $(u_n)$ *est une fonction définie sur l'ensemble des entiers naturels* $\mathbb{N}$ *ou sur une partie de* $\mathbb{N}$ *et à valeurs dans l'ensemble des nombres réels* $\mathbb{R}$*.*

$$\begin{array}{rccc} u: & \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\ & n & \mapsto & u(n) = u_n \end{array}$$

**Exercice 1.**

1. *On considère la suite définie par la* ***forme explicite*** *:* $v_n = n^2 - 5$ , $n \geqslant 1$ *. Calculer* $v_1$*,* $v_2$ *et* $v_3$*.*
2. *On considère la suite définie par la* ***relation de récurrence*** *:* $w_{n+1} = w_n - 2$ , $n \geqslant 0$ *et la donnée du premier terme :* $w_0 = 4$ *. Calculer* $w_1$*,* $w_2$ *et* $w_3$*.*

## 2 Sens de variation d'une suite

**Définition 2.** *Une suite* $(u_n)_{n\geqslant 0}$ *est* ***croissante*** *si pour tout entier* $n \geqslant 0$ *alors* $u_{n+1} \geqslant u_n$ *.*

**Exemple 1.** *La suite* $(v_n)_{n\geqslant 1}$ *définie précédemment est croissante.*

**Définition 3.** *Une suite* $(u_n)_{n\geqslant 0}$ *est* ***décroissante*** *si pour tout entier* $n \geqslant 0$ *alors* $u_{n+1} \leqslant u_n$ *.*

**Exemple 2.** *La suite* $(w_n)_{n\geqslant 0}$ *définie précédemment est décroissante.*

**Définition 4.** *Une suite* $(u_n)_{n\geqslant 0}$ *est* ***constante*** *si pour tout entier* $n \geqslant 0$ *alors* $u_{n+1} = u_n$ *.*

**Remarque 1.** *Une suite constante est à la fois croissante et décroissante.*

**Remarque 2.** *Pour connaître le sens de variation d'une suite, on étudie le signe de* $u_{n+1} - u_n$ *.*

## 3 Suites arithmétiques et géométriques

### 3.1 Suites arithmétiques

**Définition 5.** *On appelle* ***suite arithmétique*** *de premier terme* $u_0$ *et de* ***raison*** $a \in \mathbb{R}$ *une suite* $(u_n)_{n\geqslant 0}$ *vérifiant pour tout entier* $n \geqslant 0$ *:* $\boxed{u_{n+1} = u_n + a}$ *.*

**Exemple 3.** *La suite des nombres pairs est une suite arithmétique de premier terme 0 et de raison 2.*

**Propriété 1.** *Une suite arithmétique de raison $a \in \mathbb{R}$ est croissante si $a > 0$ et décroissante si $a < 0$ , elle est constante si $a = 0$ .*

*Démonstration.* La suite $(u_n)$ est définie par la relations de récurrence $u_{n+1} = u_n + a$ donc $u_{n+1} - u_n = a$ . Si $a > 0$ alors $u_{n+1} \geqslant u_n$ et la suite est croissante, si $a < 0$ alors $u_{n+1} \leqslant u_n$ et la suite est décroissante, enfin si $a = 0$ alors $u_{n+1} = u_n$ et la suite est constante. □

**Propriété 2.** *Une suite arithmétique de premier terme $u_0$ et de raison $a \in \mathbb{R}$ vérifie la relation* $\boxed{u_n = u_0 + na}$ *pour tout $n \geqslant 0$ .*

*Démonstration.* Admis. □

**Remarque 3.** *Il faut savoir adapter la formule précédente dans le cas où le premier terme n'est pas $u_0$ , par exemple : $u_n = u_3 + (n-3)a$ pour $n \geqslant 3$.*

**Exercice 2.** *Calculer le terme d'indice 21 d'un suite arithmétique de raison 3 dont le terme d'indice 7 vaut $-1$.*

### 3.2 Suites géométriques

**Définition 6.** *On appelle* ***suite géométrique*** *de premier terme $u_0$ et de* ***raison*** *$r \in \mathbb{R}_+^*$ une suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant pour tout entier $n \geqslant 0$ :* $\boxed{u_{n+1} = r \times u_n}$ .

**Exemple 4.** *La suite des puissances de deux est une suite géométrique de premier terme 1 et de raison 2.*

**Propriété 3.** *Une suite géométrique strictement positive de raison $r$ est croissante si $r > 1$ et décroissante si $0 < r < 1$ , elle est constante si $r = 1$.*

*Démonstration.* La suite étant strictement positive, $r \in \mathbb{R}_+^*$. La suite $(u_n)$ est définie par la relation de récurrence $u_{n+1} = r \times u_n$ donc $\frac{u_{n+1}}{u_n} = r$ . Si $r > 1$ alors $u_{n+1} \geqslant u_n$ et la suite est croissante, si $0 < r < 1$ alors $u_{n+1} \leqslant u_n$ et la suite est décroissante, enfin si $r = 1$ alors $u_{n+1} = u_n$ et la suite est constante. □

**Propriété 4.** *Une suite géométrique de premier terme $u_0$ et de raison $r \in \mathbb{R}_+^*$ vérifie la relation* $\boxed{u_n = u_0 \times r^n}$ *pour tout $n \geqslant 0$ .*

*Démonstration.* Admis. □

**Remarque 4.** *Il faut savoir adapter la formule précédente dans le cas où le premier terme n'est pas $u_0$ , par exemple : $u_n = u_3 \times r^{n-3}$ pour $n \geqslant 3$ .*

**Exercice 3.** *Calculer le terme d'indice 21 d'un suite géométrique de raison 2 dont le terme d'indice 7 vaut 3.*