

Proportionnalité

1 Notion de proportion

Définition. On considère une partie A d'un ensemble E . On appelle proportion de A dans E le quotient du nombre d'éléments de A par le nombre d'éléments de E .

Exemple. Une classe de 30 élèves comporte 9 filles. La proportion de filles dans la classe est $\frac{9}{30} = 0,3$.

Les proportions s'expriment fréquemment sous la forme de pourcentages. Ceux-ci se calculent simplement à l'aide d'un tableau de proportionnalité :

9	?
30	100

Dans l'exemple précédent $\frac{9 \times 100}{30} = 30$, la proportion de filles dans la classe est donc de 30%. On aurait aussi pu remarquer directement que $0,3 = 30\%$.

2 Évolution d'une quantité

Il existe deux manières principales de caractériser l'évolution d'une quantité.

Définition. On considère la valeur initiale V_i et la valeur finale V_f d'une quantité. On appelle coefficient d'évolution de la quantité : $c = \frac{V_f}{V_i}$.

Le coefficient d'évolution n'est rien d'autre que le coefficient multiplicateur permettant de passer de la quantité initiale à la quantité finale.

Exemple. Un disque coûtant 20€ est baissé à 15€. Le coefficient d'évolution est $c = \frac{15}{20} = 0,75$.

Le coefficient d'évolution est supérieur à 1 dans le cas d'une augmentation et inférieur à 1 dans le cas d'une réduction.

Définition. On considère la valeur initiale V_i et la valeur finale V_f d'une quantité. On appelle taux d'évolution de la quantité : $t = \frac{V_f - V_i}{V_i}$.

Le taux d'évolution représente la variation de la quantité relativement à la quantité de départ.

Exemple. Dans l'exemple qui précède le taux d'évolution est $t = \frac{15-20}{20} = -0,25$. Le prix du disque a donc diminué de 25%.

Le taux d'évolution est positif dans le cas d'une augmentation et négatif dans le cas d'une réduction.

Propriété. On a la relation suivante liant coefficient et taux d'évolution : $c = 1 + t$.

Démonstration. $1 + t = 1 + \frac{V_f - V_i}{V_i} = \frac{V_i}{V_i} + \frac{V_f - V_i}{V_i} = \frac{V_f}{V_i} = c$ □

Exercice. *Un lecteur DVD coûtant 100€ voit son prix augmenter de 10% puis diminuer de 10%. Calculer le prix final.*

Il s'agit ici de taux d'évolution :

$$100 \times \left(1 + \frac{10}{100}\right) = 100 \times 1,1 = 110$$

Le prix après l'augmentation est 110€.

$$110 \times \left(1 - \frac{10}{100}\right) = 100 \times 0,9 = 99$$

Le prix après la diminution est 99€.