

Suites numériques

1 Notion de suite

Définition. Une suite numérique (u_n) est une fonction définie sur l'ensemble des entiers naturels \mathbb{N} ou sur une partie de \mathbb{N} et à valeurs dans l'ensemble des nombres réels \mathbb{R} .

$$\begin{aligned} u : \mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{R} \\ n &\mapsto u(n) = u_n \end{aligned}$$

Exemples. On considère la suite définie par : $v_n = n^2 - 5$, $n \geq 1$. Alors :

$$\begin{aligned} v_1 &= 1^2 - 5 = -4 \\ v_2 &= 2^2 - 5 = -1 \\ v_3 &= 3^2 - 5 = 4 \quad \text{etc.} \dots \end{aligned}$$

On considère la suite définie par la relation de récurrence : $w_{n+1} = w_n + 2$, $n \geq 0$ et la donnée du premier terme : $w_0 = 4$. Alors :

$$\begin{aligned} w_1 &= w_0 + 2 = 4 + 2 = 6 \\ w_2 &= w_1 + 2 = 6 + 2 = 8 \quad \text{etc.} \dots \end{aligned}$$

2 Sens de variation d'une suite

Définition. Une suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est croissante si pour tout entier $n \geq 0$ alors $u_{n+1} \geq u_n$.

Exemple. La suite $(w_n)_{n \geq 0}$ définie précédemment est croissante car d'après la relation de récurrence $w_{n+1} \geq w_n$ pour $n \geq 0$.

Définition. Une suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est décroissante si pour tout entier $n \geq 0$ alors $u_{n+1} \leq u_n$.

Exemple. La suite (s_n) définie par $s_1 = 3$ et $s_{n+1} = \frac{s_n}{2}$ pour $n > 1$ est décroissante car $s_{n+1} \leq s_n$ pour $n > 1$.

Définition. Une suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est constante si pour tout entier $n \geq 0$ alors $u_{n+1} = u_n$.

Remarque 1. Une suite constante est à la fois croissante et décroissante.

Remarque 2. Pour connaître le sens de variation d'une suite, on étudie le signe de $u_{n+1} - u_n$.

3 Suites arithmétiques et géométriques

Définition. On appelle suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison $a \in \mathbb{R}$ une suite $(u_n)_{n \geq 0}$ vérifiant pour tout entier $n \geq 0$: $u_{n+1} = u_n + a$.

Exemple. La suite des nombres pairs est une suite arithmétique de premier terme 0 et de raison 2 :

$$\begin{aligned} u_0 &= 0 \\ u_{n+1} &= u_n + 2 \end{aligned}$$

Propriété. Une suite arithmétique de raison $a \in \mathbb{R}$ est croissante si $a > 0$ et décroissante si $a < 0$, elle est constante si $a = 0$.

Démonstration. La suite (u_n) est définie par la relations de récurrence $u_{n+1} = u_n + a$ donc $u_{n+1} - u_n = a$. Si $a > 0$ alors $u_{n+1} \geq u_n$ et la suite est croissante, si $a < 0$ alors $u_{n+1} \leq u_n$ et la suite est décroissante, enfin si $a = 0$ alors $u_{n+1} = u_n$ et la suite est constante. \square

Propriété. Une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison $a \in \mathbb{R}$ vérifie la relation $u_n = u_0 + na$ pour tout $n \geq 0$.

Démonstration. Admis. \square

Remarque. Il faut savoir adapter la formule précédente dans le cas où le premier terme n'est pas u_0 , par exemple : $u_n = u_3 + (n - 3)a$ pour $n \geq 3$.

Définition. On appelle suite géométrique de premier terme u_0 et de raison $r \in \mathbb{R}_+^*$ une suite $(u_n)_{n \geq 0}$ vérifiant pour tout entier $n \geq 0$: $u_{n+1} = r \times u_n$.

Exemple. La suite des puissances de deux est une suite géométrique de premier terme 1 et de raison 2 :

$$\begin{aligned} u_0 &= 1 \\ u_{n+1} &= 2u_n \end{aligned}$$

Propriété. Une suite géométrique strictement positive de raison r est croissante si $r > 1$ et décroissante si $0 < r < 1$, elle est constante si $r = 1$.

Démonstration. La suite étant strictement positive, $r \in \mathbb{R}_+^*$. La suite (u_n) est définie par la relation de récurrence $u_{n+1} = r \times u_n$ donc $\frac{u_{n+1}}{u_n} = r$. Si $r > 1$ alors $u_{n+1} \geq u_n$ et la suite est croissante, si $0 < r < 1$ alors $u_{n+1} \leq u_n$ et la suite est décroissante, enfin si $r = 1$ alors $u_{n+1} = u_n$ et la suite est constante. \square

Propriété. Une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison $r \in \mathbb{R}_+^*$ vérifie la relation $u_n = u_0 \times r^n$ pour tout $n \geq 0$.

Démonstration. Admis. \square

Remarque. Il faut savoir adapter la formule précédente dans le cas où le premier terme n'est pas u_0 , par exemple : $u_n = u_3 \times r^{n-3}$ pour $n \geq 3$.