Suites numériques

1 Notion de suite

Définition. *Une suite numérique (u_n) est une fonction définie sur l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$ ou sur une partie de $\mathbb{N}$ et à valeurs dans l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$.*

$$\begin{array}{rccl} u: & \mathbb{N} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & n & \mapsto & u(n) = u_n \end{array}$$

Exemples. *On considère la suite définie par : $v_n = n^2 - 5$, $n \geqslant 1$. Alors :*

$$\begin{array}{lcccc} v_1 & = & 1^2 - 5 & = & -4 \\ v_2 & = & 2^2 - 5 & = & -1 \\ v_3 & = & 3^2 - 5 & = & 4 \quad \textit{etc...} \end{array}$$

On considère la suite définie par la relation de récurrence : $w_{n+1} = w_n + 2$, $n \geqslant 0$ et la donnée du premier terme : $w_0 = 4$. Alors :

$$\begin{array}{lcccccc} w_1 & = & w_0 + 2 & = & 4 + 2 & = & 6 \\ w_2 & = & w_1 + 2 & = & 6 + 2 & = & 8 \quad \textit{etc...} \end{array}$$

2 Sens de variation d'une suite

Définition. *Une suite $(u_n)_{n \geqslant 0}$ est croissante si pour tout entier $n \geqslant 0$ alors $u_{n+1} \geqslant u_n$.*

Exemple. *La suite $(w_n)_{n \geqslant 0}$ définie précédemment est croissante car d'après la relation de récurrence $w_{n+1} \geqslant w_n$ pour $n \geqslant 0$.*

Définition. *Une suite $(u_n)_{n \geqslant 0}$ est décroissante si pour tout entier $n \geqslant 0$ alors $u_{n+1} \leqslant u_n$.*

Exemple. *La suite (s_n) définie par $s_1 = 3$ et $s_{n+1} = \frac{s_n}{2}$ pour $n > 1$ est décroissante car $s_{n+1} \leqslant s_n$ pour $n > 1$.*

Définition. *Une suite $(u_n)_{n \geqslant 0}$ est constante si pour tout entier $n \geqslant 0$ alors $u_{n+1} = u_n$.*

Remarque 1. *Une suite constante est à la fois croissante et décroissante.*

Remarque 2. *Pour connaître le sens de variation d'une suite, on étudie le signe de $u_{n+1} - u_n$.*

3 Suites arithmétiques et géométriques

Définition. *On appelle suite arithmétique de premier terme* u_0 *et de raison* $a \in \mathbb{R}$ *une suite* $(u_n)_{n\geqslant 0}$ *vérifiant pour tout entier* $n \geqslant 0$ *:* $u_{n+1} = u_n + a$ *.*

Exemple. *La suite des nombres pairs est une suite arithmétique de premier terme 0 et de raison 2 :*

$$\begin{aligned} u_o &= 0 \\ u_{n+1} &= u_n + 2 \end{aligned}$$

Propriété. *Une suite arithmétique de raison* $a \in \mathbb{R}$ *est croissante si* $a > 0$ *et décroissante si* $a < 0$ *, elle est constante si* $a = 0$ *.*

Démonstration. La suite (u_n) est définie par la relations de récurrence $u_{n+1} = u_n + a$ donc $u_{n+1} - u_n = a$. Si $a > 0$ alors $u_{n+1} \geqslant u_n$ et la suite est croissante, si $a < 0$ alors $u_{n+1} \leqslant u_n$ et la suite est décroissante, enfin si $a = 0$ alors $u_{n+1} = u_n$ et la suite est constante. □

Propriété. *Une suite arithmétique de premier terme* u_0 *et de raison* $a \in \mathbb{R}$ *vérifie la relation* $u_n = u_0 + na$ *pour tout* $n \geqslant 0$ *.*

Démonstration. Admis. □

Remarque. *Il faut savoir adapter la formule précédente dans le cas où le premier terme n'est pas* u_o *, par exemple :* $u_n = u_3 + (n-3)a$ *pour* $n \geqslant 3$.

Définition. *On appelle suite géométrique de premier terme* u_0 *et de raison* $r \in \mathbb{R}_+^*$ *une suite* $(u_n)_{n\geqslant 0}$ *vérifiant pour tout entier* $n \geqslant 0$ *:* $u_{n+1} = r \times u_n$ *.*

Exemple. *La suite des puissances de deux est une suite géométrique de premier terme 1 et de raison 2 :*

$$\begin{aligned} u_o &= 1 \\ u_{n+1} &= 2u_n \end{aligned}$$

Propriété. *Une suite géométrique strictement positive de raison* r *est croissante si* $r > 1$ *et décroissante si* $0 < r < 1$ *, elle est constante si* $r = 1$.

Démonstration. La suite étant strictement positive, $r \in \mathbb{R}_+^*$. La suite (u_n) est définie par la relation de récurrence $u_{n+1} = r \times u_n$ donc $\frac{u_{n+1}}{u_n} = r$. Si $r > 1$ alors $u_{n+1} \geqslant u_n$ et la suite est croissante, si $0 < r < 1$ alors $u_{n+1} \leqslant u_n$ et la suite est décroissante, enfin si $r = 1$ alors $u_{n+1} = u_n$ et la suite est constante. □

Propriété. *Une suite géométrique de premier terme* u_0 *et de raison* $r \in \mathbb{R}_+^*$ *vérifie la relation* $u_n = u_0 \times r^n$ *pour tout* $n \geqslant 0$ *.*

Démonstration. Admis. □

Remarque. *Il faut savoir adapter la formule précédente dans le cas où le premier terme n'est pas* u_o *, par exemple :* $u_n = u_3 \times r^{n-3}$ *pour* $n \geqslant 3$ *.*