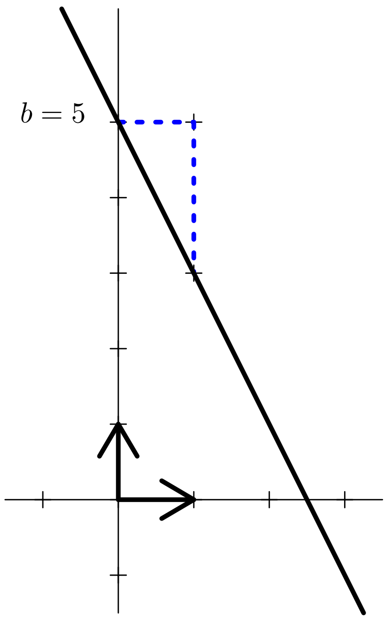
Droites et Systèmes

1 Équation réduite d'une droite

Propriété. *Pour toute droite du plan muni d'un repère* $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$*, il existe une équation appelée* équation réduite *vérifiée par les coordonnées* $(x; y)$ *de ses points. Elle est de la forme* $y = ax + b$ *ou* $x = c$*.*

Remarques. *Dans le cas de l'équation réduite de la forme* $y = ax + b$*,* b *est appelé* ordonnée à l'origine *car c'est l'ordonnée du point d'intersection de la droite avec l'axe des ordonnées,* a *est appelé* coefficient directeur *car la droite est dirigée par le vecteur* $\begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix}$*.*

Exemple. *On considère la droite d'équation* $y = -2x + 5$ *:*



Propriété. *Le coefficient directeur d'une droite* (AB) *est dans le cas où* $x_A \neq x_B$ *:*

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{\textit{accroissement des ordonnées}}{\textit{accroissement des abscisses}}$$

2 Systèmes linéaires à deux inconnues

Définition. *On appelle système linéaire d'équations à deux inconnues x et y un système d'équations de la forme :*

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_1x+b_1y & = & c_1 \\ a_2x+b_2y & = & c_2 \end{array}\right.$$

Résoudre ce système, c'est trouver tous les couples $(x;y)$ vérifiant les deux équations.

2.1 Interprétation graphique

Chacune des deux équations du système correspond à l'équation d'une droite, résoudre le système revient à chercher les coordonnées des points d'intersection de ces deux droites.

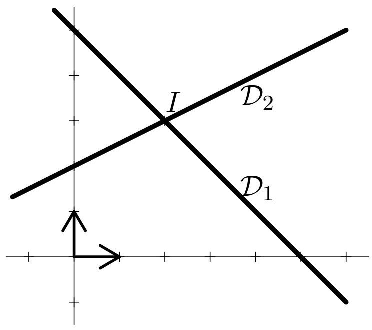
Trois configurations sont possibles :

- Les deux droites sont sécantes : le système admet une unique solution.
- Les deux droites sont parallèles : le système n'admet aucune solution.
- Les deux droites sont confondues : le système admet une infinité de solutions.

Exemple. *Considérons le système suivant :*

$$\left\{\begin{array}{rcll} x+y & = & 5 & (E_1) \\ 2y-x & = & 4 & (E_2) \end{array}\right.$$

(E_1) *peut se mettre sous la forme* $y=-x+5$ *: équation réduite d'une droite* $\mathcal{D}_1$.
(E_2) *peut se mettre sous la forme* $y=\frac{x}{2}+2$ *: équation réduite d'une droite* $\mathcal{D}_2$.



$\mathcal{D}_1$ *et* $\mathcal{D}_2$ *sont sécantes en un point* I *de coordonnées* $(2;3)$ *qui est le couple solution du système.*

2.2 Méthodes de résolution

2.2.1 Méthode par substitution

L'idée est d'exprimer l'inconnue y en fonction de l'inconnue x à l'aide de la première équation puis de la remplacer dans la deuxième équation pour obtenir une équation linéaire à une seule inconnue x.

Exemple.

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x+y & = & 5 \\ 3x-4y & = & 1 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcl} y & = & 5-2x \\ 3x-4(5-2x) & = & 1 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcl} y & = & 5-2x \\ 11x-20 & = & 1 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} y & = & 5-2x \\ x & = & \frac{21}{11} \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcl} x & = & \frac{21}{11} \\ y & = & 5-2\times\frac{21}{11} \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcl} x & = & \frac{21}{11} \\ y & = & \frac{13}{11} \end{array}\right.$$

2.2.2 Méthode par combinaison

L'idée est de multiplier chacune des deux équations par des coefficients adaptés de manière à faire disparaitre une inconnue par addition ou soustraction membre à membre.

Exemple.

$$\left\{\begin{array}{rcll} 2x+y & = & 5 & (\times 3) \\ 3x-4y & = & 1 & (\times 2) \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcl} 6x+3y & = & 15 \\ 6x-8y & = & 2 \end{array}\right.$$

d'où par soustraction : $11y = 13$ *et* $y = \frac{13}{11}$.

$$\left\{\begin{array}{rcll} 2x+y & = & 5 & (\times 4) \\ 3x-4y & = & 1 & \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcl} 8x+4y & = & 20 \\ 3x-4y & = & 1 \end{array}\right.$$

d'où par addition : $11x = 21$ *et* $x = \frac{21}{11}$.