

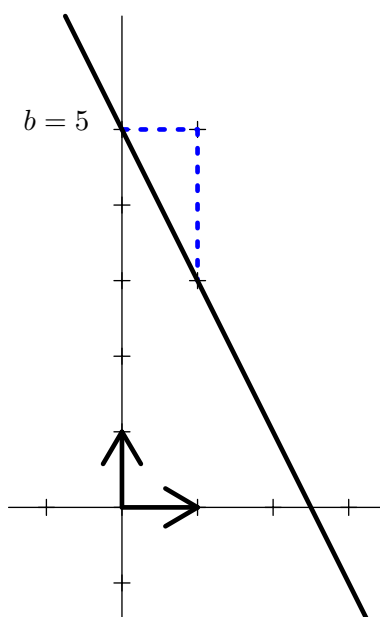
Droites et Systèmes

1 Équation réduite d'une droite

Propriété. Pour toute droite du plan muni d'un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) , il existe une équation appelée équation réduite vérifiée par les coordonnées $(x; y)$ de ses points. Elle est de la forme $y = ax + b$ ou $x = c$.

Remarques. Dans le cas de l'équation réduite de la forme $y = ax + b$, b est appelé ordonnée à l'origine car c'est l'ordonnée du point d'intersection de la droite avec l'axe des ordonnées, a est appelé coefficient directeur car la droite est dirigée par le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix}$.

Exemple. On considère la droite d'équation $y = -2x + 5$:



Propriété. Le coefficient directeur d'une droite (AB) est dans le cas où $x_A \neq x_B$:

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{\text{accroissement des ordonnées}}{\text{accroissement des abscisses}}$$

2 Systèmes linéaires à deux inconnues

Définition. On appelle système linéaire d'équations à deux inconnues x et y un système d'équations de la forme :

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

Résoudre ce système, c'est trouver tous les couples $(x; y)$ vérifiant les deux équations.

2.1 Interprétation graphique

Chacune des deux équations du système correspond à l'équation d'une droite, résoudre le système revient à chercher les coordonnées des points d'intersection de ces deux droites.

Trois configurations sont possibles :

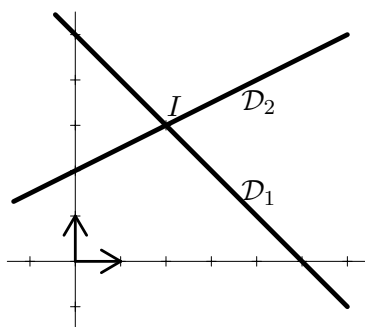
- Les deux droites sont sécantes : le système admet une unique solution.
- Les deux droites sont parallèles : le système n'admet aucune solution.
- Les deux droites sont confondues : le système admet une infinité de solutions.

Exemple. Considérons le système suivant :

$$\begin{cases} x + y = 5 & (E_1) \\ 2y - x = 4 & (E_2) \end{cases}$$

(E_1) peut se mettre sous la forme $y = -x + 5$: équation réduite d'une droite \mathcal{D}_1 .

(E_2) peut se mettre sous la forme $y = \frac{x}{2} + 2$: équation réduite d'une droite \mathcal{D}_2 .



\mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 sont sécantes en un point I de coordonnées $(2; 3)$ qui est le couple solution du système.

2.2 Méthodes de résolution

2.2.1 Méthode par substitution

L'idée est d'exprimer l'inconnue y en fonction de l'inconnue x à l'aide de la première équation puis de la remplacer dans la deuxième équation pour obtenir une équation linéaire à une seule inconnue x .

Exemple.

$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 3x - 4y = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 5 - 2x \\ 3x - 4(5 - 2x) = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 5 - 2x \\ 11x - 20 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 5 - 2x \\ x = \frac{21}{11} \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{21}{11} \\ y = 5 - 2 \times \frac{21}{11} \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{21}{11} \\ y = \frac{13}{11} \end{cases}$$

2.2.2 Méthode par combinaison

L'idée est de multiplier chacune des deux équations par des coefficients adaptés de manière à faire disparaître une inconnue par addition ou soustraction membre à membre.

Exemple.

$$\begin{cases} 2x + y = 5 & (\times 3) \\ 3x - 4y = 1 & (\times 2) \end{cases} \quad \begin{cases} 6x + 3y = 15 \\ 6x - 8y = 2 \end{cases}$$

d'où par soustraction : $11y = 13$ et $y = \frac{13}{11}$.

$$\begin{cases} 2x + y = 5 & (\times 4) \\ 3x - 4y = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} 8x + 4y = 20 \\ 3x - 4y = 1 \end{cases}$$

d'où par addition : $11x = 21$ et $x = \frac{21}{11}$.