

Probabilités

1 Vocabulaire

Définition. Une expérience aléatoire est une expérience dont le résultat est lié au hasard. Chaque résultat possible est appelé une éventualité, l'ensemble des éventualités est appelé univers.

Exemple. On considère le lancer d'un dé à six faces, l'univers est $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Définition. On appelle événement un ensemble d'éventualités, c'est à dire une partie de l'univers. On distingue :

- événement élémentaire : il ne contient qu'une seule éventualité.
- événement impossible : il ne contient aucune éventualité.
- événement certain : il contient toutes les éventualités.

Exemples. On considère le lancer d'un dé à six faces.

- le 5 sort : $A = \{5\}$, événement élémentaire.
- un multiple de 2 sort : $B = \{2, 4, 6\}$.
- un multiple de 7 sort : $C = \emptyset$, événement impossible.
- un nombre inférieur à 7 sort : $D = \Omega$, événement certain.

Définitions. - On note $E_1 \cap E_2$ l'intersection de deux événements, c'est l'ensemble des éventualités appartenant à E_1 et à E_2 .

- On note $E_1 \cup E_2$ l'union de deux événements, c'est l'ensemble des éventualités appartenant à E_1 ou à E_2 .
- On note \bar{E} le contraire de l'événement E , c'est l'ensemble des éventualités qui n'appartiennent pas à E .
- Deux événements E_1 et E_2 sont dits incompatibles si $E_1 \cap E_2 = \emptyset$, c'est à dire qu'ils ne peuvent se réaliser en même temps.

Exemples. Dans l'exemple précédent, on a :

$$A \cup B = \{2, 4, 5, 6\} \quad A \cap D = \{5\} \quad \bar{B} = 1, 3, 5 \quad A \cap B = \emptyset \text{ donc } A \text{ et } B \text{ sont incompatibles}$$

Remarques.

$$\bar{\Omega} = \emptyset \quad \bar{\emptyset} = \Omega \quad \overline{\bar{E}} = E \quad E \text{ et } \bar{E} \text{ sont incompatibles}$$

2 Notion de Probabilité

Définition. Une probabilité sur un univers Ω est une application qui à tout événement E associe un nombre $P(E)$ compris entre 0 et 1 et appelé probabilité de l'événement E avec :

$$P(\Omega) = 1$$

Si E_1 et E_2 sont incompatibles alors $P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2)$.

Remarque. $P(\emptyset) = 0$ car Ω et \emptyset sont incompatibles et $P(\Omega) = P(\Omega \cup \emptyset) = P(\Omega) + P(\emptyset)$.

Exemple. On considère un dé truqué avec les probabilités :

$$P(\{1\}) = \frac{1}{6} \quad P(\{2\}) = \frac{1}{12} \quad P(\{3\}) = \frac{1}{12} \quad P(\{4\}) = \frac{1}{6} \quad P(\{5\}) = \frac{1}{6} \quad P(\{6\}) = \frac{1}{3}$$

propriété. On considère une probabilité P sur un univers Ω , alors pour tout événement E :

$$0 \leq P(E) \leq 1 \quad P(\overline{E}) = 1 - P(E)$$

Démonstration. Les événements E et \overline{E} sont incompatibles donc :

$$1 = P(\Omega) = P(E \cup \overline{E}) = P(E) + P(\overline{E})$$

□

Exemple. Dans le cas du dé truqué précédent :

$$P(\overline{\{2\}}) = 1 - P(\{2\}) = 1 - \frac{1}{12} = \frac{11}{12}$$

Définition. Soit P une probabilité sur un univers Ω , on dit qu'il y a équiprobabilité ou que la probabilité est uniforme si tous les événements élémentaires ont la même probabilité.

Exemple 1. On considère un dé équilibré à six faces :

$$P(\{1\}) = P(\{2\}) = P(\{3\}) = P(\{4\}) = P(\{5\}) = P(\{6\}) = \frac{1}{6}$$

Propriété. Soit P une probabilité uniforme sur un univers $\Omega = \{a_1, a_2, a_3 \dots a_n\}$. Alors :

$$P(\{a_k\}) = \frac{1}{n} = \frac{1}{\text{nombre de cas possibles}}$$

Si E est un événement contenant p éventualités, alors :

$$P(E) = \frac{p}{n} = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}$$

Exemple. On considère un dé équilibré à six faces et l'événement E : obtenir un nombre pair. Les 3 cas favorables sont $\{2\}$, $\{4\}$ et $\{6\}$ sur un total de 6 cas possibles donc :

$$P(E) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$