

# Probabilités

## 1 Vocabulaire

**Définition.** Une expérience aléatoire est une expérience dont le résultat est lié au hasard. Chaque résultat possible est appelé une éventualité, l'ensemble des éventualités est appelé univers.

**Exemple.** On considère le lancer d'un dé à six faces, l'univers est  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ .

**Définition.** On appelle événement un ensemble d'éventualités, c'est à dire une partie de l'univers. On distingue :

- événement élémentaire : il ne contient qu'une seule éventualité.
- événement impossible : il ne contient aucune éventualité.
- événement certain : il contient toutes les éventualités.

**Exemples.** On considère le lancer d'un dé à six faces.

- le 5 sort :  $A = \{5\}$ , événement élémentaire.
- un multiple de 2 sort :  $B = \{2, 4, 6\}$ .
- un multiple de 7 sort :  $C = \emptyset$ , événement impossible.
- un nombre inférieur à 7 sort :  $D = \Omega$ , événement certain.

**Définitions.** - On note  $E_1 \cap E_2$  l'intersection de deux événements, c'est l'ensemble des éventualités appartenant à  $E_1$  et à  $E_2$ .

- On note  $E_1 \cup E_2$  l'union de deux événements, c'est l'ensemble des éventualités appartenant à  $E_1$  ou à  $E_2$ .
- On note  $\bar{E}$  le contraire de l'événement  $E$ , c'est l'ensemble des éventualités qui n'appartiennent pas à  $E$ .
- Deux événements  $E_1$  et  $E_2$  sont dits incompatibles si  $E_1 \cap E_2 = \emptyset$ , c'est à dire qu'ils ne peuvent se réaliser en même temps.

**Exemples.** Dans l'exemple précédent, on a :

$$A \cup B = \{2, 4, 5, 6\} \quad A \cap D = \{5\} \quad \bar{B} = 1, 3, 5 \quad A \cap B = \emptyset \text{ donc } A \text{ et } B \text{ sont incompatibles}$$

**Remarques.**

$$\bar{\Omega} = \emptyset \quad \bar{\emptyset} = \Omega \quad \overline{\bar{E}} = E \quad E \text{ et } \bar{E} \text{ sont incompatibles}$$

## 2 Notion de Probabilité

**Définition.** Une probabilité sur un univers  $\Omega$  est une application qui à tout événement  $E$  associe un nombre  $P(E)$  compris entre 0 et 1 et appelé probabilité de l'événement  $E$  avec :

$$P(\Omega) = 1$$

Si  $E_1$  et  $E_2$  sont incompatibles alors  $P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2)$ .

**Remarque.**  $P(\emptyset) = 0$  car  $\Omega$  et  $\emptyset$  sont incompatibles et  $P(\Omega) = P(\Omega \cup \emptyset) = P(\Omega) + P(\emptyset)$ .

**Exemple.** On considère un dé truqué avec les probabilités :

$$P(\{1\}) = \frac{1}{6} \quad P(\{2\}) = \frac{1}{12} \quad P(\{3\}) = \frac{1}{12} \quad P(\{4\}) = \frac{1}{6} \quad P(\{5\}) = \frac{1}{6} \quad P(\{6\}) = \frac{1}{3}$$

**propriété.** On considère une probabilité  $P$  sur un univers  $\Omega$ , alors pour tout événement  $E$  :

$$0 \leq P(E) \leq 1 \quad P(\overline{E}) = 1 - P(E)$$

*Démonstration.* Les événements  $E$  et  $\overline{E}$  sont incompatibles donc :

$$1 = P(\Omega) = P(E \cup \overline{E}) = P(E) + P(\overline{E})$$

□

**Exemple.** Dans le cas du dé truqué précédent :

$$P(\overline{\{2\}}) = 1 - P(\{2\}) = 1 - \frac{1}{12} = \frac{11}{12}$$

**Définition.** Soit  $P$  une probabilité sur un univers  $\Omega$ , on dit qu'il y a équiprobabilité ou que la probabilité est uniforme si tous les événements élémentaires ont la même probabilité.

**Exemple 1.** On considère un dé équilibré à six faces :

$$P(\{1\}) = P(\{2\}) = P(\{3\}) = P(\{4\}) = P(\{5\}) = P(\{6\}) = \frac{1}{6}$$

**Propriété.** Soit  $P$  une probabilité uniforme sur un univers  $\Omega = \{a_1, a_2, a_3 \dots a_n\}$ . Alors :

$$P(\{a_k\}) = \frac{1}{n} = \frac{1}{\text{nombre de cas possibles}}$$

Si  $E$  est un événement contenant  $p$  éventualités, alors :

$$P(E) = \frac{p}{n} = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}$$

**Exemple.** On considère un dé équilibré à six faces et l'événement  $E$  : obtenir un nombre pair. Les 3 cas favorables sont  $\{2\}$ ,  $\{4\}$  et  $\{6\}$  sur un total de 6 cas possibles donc :

$$P(E) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$