

## Fonctions polynômes

## 1 Trinôme du second degré

**Définition 1.** On appelle **trinôme du second degré** toute fonction  $f(x) = ax^2 + bx + c$  avec  $a, b$  et  $c$  des nombres réels.

**Exemple 1.** Montrer que la fonction  $f(x) = 2x^2 + x - 3$  est un trinôme du second degré et déterminer ses coefficients  $a, b$  et  $c$ .

## 1.1 Forme canonique d'un trinôme du second degré

**Théorème 1.** Tout trinôme du second degré  $ax^2 + bx + c$  avec  $a \neq 0$  peut s'écrire de façon unique sous la **forme canonique**  $a(x - m)^2 + n$ . On a alors  $m = -\frac{b}{2a}$  et  $n = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$ .

*Démonstration.* au programme. □

**Exercice 1.** Mettre le trinôme du second degré  $2x^2 + x - 3$  sous sa forme canonique.

## 1.2 Résolution de l'équation du second degré

**Définition 2.** On appelle **discriminant** d'un trinôme du second degré  $ax^2 + bx + c$ , le réel  $\Delta = b^2 - 4ac$ .

**Théorème 2.** Soit  $ax^2 + bx + c = 0$  une équation du second degré avec  $a \neq 0$ .

– Si  $\Delta < 0$ , l'équation n'admet aucune solution réelle.

– Si  $\Delta = 0$ , l'équation admet une unique solution  $x_0 = -\frac{b}{2a}$ .

– Si  $\Delta > 0$ , l'équation admet deux solutions  $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$  et  $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ .

*Démonstration.* au programme. □

**Exercice 2.** Résoudre l'équation du second degré  $2x^2 + x - 3 = 0$ .

## 1.3 Signe d'un trinôme du second degré

**Théorème 3.** Soit  $ax^2 + bx + c = 0$  un trinôme du second degré avec  $a \neq 0$ .

– Si  $\Delta < 0$ , le trinôme est du signe de  $a$  et ne s'annule pas.

– Si  $\Delta = 0$ , le trinôme se factorise sous la forme  $a(x - x_0)^2$ , il est du signe de  $a$  et s'annule en  $x_0$ .

– Si  $\Delta > 0$ , le trinôme se factorise sous la forme  $a(x - x_1)(x - x_2)$ , il est du signe de  $a$  à l'extérieur des racines  $x_1$  et  $x_2$  et du signe contraire à l'intérieur des racines et s'annule en  $x_1$  et  $x_2$ .

*Démonstration.* au programme. □

**Exercice 3.** Résoudre l'inéquation  $2x^2 - 3x + 1 \geq 0$ .

## 1.4 Représentation graphique d'un trinôme du second degré

**Théorème 4.** La représentation graphique dans un repère orthonormé d'une fonction trinôme du second degré  $f(x) = ax^2 + bx + c = a(x - m)^2 + n$  avec  $a \neq 0$  est une **parabole** telle que :

- son sommet a pour coordonnées  $(m, n)$ ,
- elle possède un axe de symétrie d'équation  $x = m$ ,
- son orientation dépend du signe de  $a$ ,
- les abscisses de ses points d'intersection éventuels avec l'axe des abscisses sont les racines du trinôme.

*Démonstration.* au programme. □

**Exercice 4.** Représenter par des schémas l'allure de la courbe représentative de la fonction trinôme dans les six cas de figure du théorème précédent.

## 2 Polynômes

**Définition 3.** On appelle **polynôme** toute fonction  $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$  avec  $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$  et  $a_n$  des nombres réels.

**Exemple 2.** Montrer que  $x - 2$ ,  $x^2 - 4$ ,  $x^3 - 2x$  et  $x^4 - x + 1$  sont des polynômes.

**Définition 4.** On considère un polynôme  $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ ,

- les réels  $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$  et  $a_n$  sont appelés **coefficients** du polynôme,
- les termes  $a_0, a_1 x, \dots, a_{n-1} x^{n-1}$  et  $a_n x^n$  sont appelés **monômes**,
- le plus grand exposant en  $x$  du polynôme est appelé **degré du polynôme**,
- l'exposant en  $x$  d'un monôme est appelé **degré du monôme**.

**Exercice 5.** Donner des exemples de polynômes de degré 0, 1, 2, 3 et 4.

**Définition 5.** Soit  $P$  un polynôme, on dit que le nombre réel  $x_0$  est une **racine** du polynôme  $P$  si  $P(x_0) = 0$ .

**Exemple 3.** Trouver une racine évidente du polynôme  $P(x) = 2x^3 - x^2 - 4x + 3$ .

**Théorème 5.** Si un polynôme  $P$  admet une racine  $x_0$  alors il se factorise sous la forme  $P(x) = (x - x_0)Q(x)$  où  $Q$  est un polynôme.

*Démonstration.* admis. □

**Exercice 6.** Factoriser le polynôme  $P(x) = 2x^3 - x^2 - 4x + 3$ .