Fonctions polynômes

1 Trinôme du second degré

Définition 1. *On appelle* ***trinôme du second degré*** *toute fonction* $\boxed{f(x) = ax^2 + bx + c}$ *avec* a, b *et* c *des nombres réels.*

Exemple 1. *Montrer que la fonction* $f(x) = 2x^2 + x - 3$ *est un trinôme du second degré et déterminer ses coefficients* a, b *et* c.

1.1 Forme canonique d'un trinôme du second degré

Théorème 1. *Tout trinôme du second degré* $\boxed{ax^2 + bx + c}$ *avec* $a \neq 0$ *peut s'écrire de façon unique sous la* ***forme canonique*** $\boxed{a(x-m)^2 + n}$. *On a alors* $\boxed{m = -\frac{b}{2a}}$ *et* $\boxed{n = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}}$.

Démonstration. au programme. □

Exercice 1. *Mettre le trinôme du second degré* $2x^2 + x - 3$ *sous sa forme canonique.*

1.2 Résolution de l'équation du second degré

Définition 2. *On appelle* ***discriminant*** *d'un trinôme du second degré* $ax^2 + bx + c$, *le réel* $\boxed{\Delta = b^2 - 4ac}$.

Théorème 2. *Soit* $ax^2 + bx + c = 0$ *une équation du second degré avec* $a \neq 0$.
- *Si* $\Delta < 0$, *l'équation n'admet aucune solution réelle.*
- *Si* $\Delta = 0$, *l'équation admet une unique solution* $\boxed{x_0 = -\frac{b}{2a}}$.
- *Si* $\Delta > 0$, *l'équation admet deux solutions* $\boxed{x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}}$ *et* $\boxed{x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}}$.

Démonstration. au programme. □

Exercice 2. *Résoudre l'équation du second degré* $2x^2 + x - 3 = 0$.

1.3 Signe d'un trinôme du second degré

Théorème 3. *Soit* $ax^2 + bx + c = 0$ *un trinôme du second degré avec* $a \neq 0$.
- *Si* $\Delta < 0$, *le trinôme est du signe de* a *et ne s'annule pas.*
- *Si* $\Delta = 0$, *le trinôme se factorise sous la forme* $\boxed{a(x - x_0)^2}$, *il est du signe de* a *et s'annule en* x_0.
- *Si* $\Delta > 0$, *le trinôme se factorise sous la forme* $\boxed{a(x - x_1)(x - x_2)}$, *il est du signe de* a *à l'extérieur des racines* x_1 *et* x_2 *et du signe contraire à l'intérieur des racines et s'annule en* x_1 *et* x_2.

Démonstration. au programme. □

Exercice 3. *Résoudre l'inéquation* $2x^2 - 3x + 1 \geqslant 0$.

1.4 Représentation graphique d'un trinôme du second degré

Théorème 4. *La représentation graphique dans un repère orthonormé d'un fonction trinôme du second degré $f(x) = ax^2 + bx + c = a(x - m)^2 + n$ avec $a \neq 0$ est une **parabole** telle que :*
- *son sommet a pour coordonnées (m, n),*
- *elle possède un axe de symétrie d'équation $x = m$,*
- *son orientation dépend su signe de a,*
- *les abscisses de ses points d'intersection éventuels avec l'axe des abscisses sont les racines du trinôme.*

Démonstration. au programme. □

Exercice 4. *Représenter par des schémas l'allure de la courbe représentative de la fonction trinôme dans les six cas de figure du théorème précédent.*

2 Polynômes

Définition 3. *On appelle **polynôme** toute fonction* $\boxed{P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0}$ *avec a_0, a_1, …, a_{n-1} et a_n des nombres réels.*

Exemple 2. *Montrer que $x - 2$, $x^2 - 4$, $x^3 - 2x$ et $x^4 - x + 1$ sont des polynômes.*

Définition 4. *On considère un polynôme* $\boxed{P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0}$,
- *les réels a_0, a_1, …, a_{n-1} et a_n sont appelés **coefficients** du polynôme,*
- *les termes a_0, a_1x, …, $a_{n-1}x^{n-1}$ et a_nx^n sont appelés **monômes**,*
- *le plus grand exposant en x du polynôme est appelé **degré du polynôme**,*
- *l'exposant en x d'un monôme est appelé **degré du monôme**.*

Exercice 5. *Donner des exemples de polynômes de degré 0, 1, 2, 3 et 4.*

Définition 5. *Soit P un polynôme, on dit que le nombre réel x_0 est une **racine** du polynôme P si $P(x_0) = 0$.*

Exemple 3. *Trouver une racine évidente du polynôme $P(x) = 2x^3 - x^2 - 4x + 3$.*

Théorème 5. *Si un polynôme P admet une racine x_0 alors il se factorise sous la forme* $\boxed{P(x) = (x - x_0)Q(x)}$ *où Q est un polynôme.*

Démonstration. admis. □

Exercice 6. *Factoriser le polynôme $P(x) = 2x^3 - x^2 - 4x + 3$.*