Composition de fonctions

On considère les fonctions de référence suivantes :

- fonction affine de paramètres a et b : $f(x) = ax + b$
- fonction inverse : $f(x) = \dfrac{1}{x}$
- fonction carré : $f(x) = x^2$

Composition de fonctions de référence

1. Compléter par des écritures littérales :
   (a) $x \longrightarrow \boxed{\text{fonction carré}} \longrightarrow \dots \longrightarrow \boxed{\text{fonction affine}(a = 2; b = -3)} \longrightarrow \dots$
   (b) $x \longrightarrow \boxed{\text{fonction affine}(a = 2; b = -3)} \longrightarrow \dots \longrightarrow \boxed{\text{fonction carré}} \longrightarrow \dots$
   (c) $x \longrightarrow \boxed{\text{fonction inverse}} \longrightarrow \dots \longrightarrow \boxed{\text{fonction affine}(a = -5; b = 4)} \longrightarrow \dots$
   (d) $x \longrightarrow \boxed{\text{fonction affine}(a = -5; b = 4)} \longrightarrow \dots \longrightarrow \boxed{\text{fonction inverse}} \longrightarrow \dots$
2. On applique à la suite deux fonctions f et g : $x \longrightarrow \boxed{\text{fonction f}} \longrightarrow f(x) \longrightarrow \boxed{\text{fonction g}} \longrightarrow g[f(x)]$
   Déterminer $g[f(x)]$ dans les cas suivants :
   (a) f est la fonction carré et g est la fonction affine de paramètres $a = -2$ et $b = 3$.
   (b) f est la fonction affine de paramètres $a = -2$ et $b = 3$ et g est la fonction carré.
   (c) f est la fonction inverse et g est la fonction affine de paramètres $a = 5$ et $b = -4$.
   (d) f est la fonction affine de paramètres $a = 5$ et $b = -4$ et g est la fonction inverse.
3. La fonction qui à x associe $g[f(x)]$ est appelée *fonction composée* de f par g et notée $g \circ f$. Expliciter l'image de x par la fonction $g \circ f$ dans les cas suivants :
   (a) $f(x) = x^2$ et $g(x) = \dfrac{2}{x+3}$.
   (b) $f(x) = \dfrac{2}{x+3}$ et $g(x) = x^2$.
   (c) $f(x) = x^2 - 1$ et $g(x) = 2 - \dfrac{1}{x}$.
   (d) $f(x) = 2 - \dfrac{1}{x}$ et $g(x) = x^2 - 1$.

Décomposition en fonctions de référence

1. Déterminer les fonctions f et g dans chacun des cas suivants :
   (a) $x \longrightarrow \boxed{\text{f}} \longrightarrow x^2 \longrightarrow \boxed{\text{g}} \longrightarrow \dfrac{1}{x^2}$
   (b) $x \longrightarrow \boxed{\text{f}} \longrightarrow x + 1 \longrightarrow \boxed{\text{g}} \longrightarrow 3(x+1) - 2$
   (c) $x \longrightarrow \boxed{\text{f}} \longrightarrow \dfrac{1}{x} \longrightarrow \boxed{\text{g}} \longrightarrow \dfrac{7}{x} - 1$
   (d) $x \longrightarrow \boxed{\text{f}} \longrightarrow x^2 \longrightarrow \boxed{\text{g}} \longrightarrow \dfrac{1}{2x^2 - 1}$
2. Décomposer les fonctions h suivantes sous la forme $g \circ f$ avec f et g des fonctions de référence :
   (a) $h(x) = \dfrac{1}{x+1}$
   (b) $h(x) = 11x^2 - 5$
   (c) $h(x) = \dfrac{3}{x} - 1$
   (d) $h(x) = x^2 - 2x + 1$