

Composition de fonctions et variations

On considère les fonctions de référence suivantes :

- fonction affine de paramètres a et b : $f(x) = ax + b$
- fonction inverse : $f(x) = \frac{1}{x}$
- fonction carré : $f(x) = x^2$

On rappelle que :

- La composée de deux fonctions croissantes est une fonction croissante.
- La composée d'une fonction croissante et d'une fonction décroissante est une fonction décroissante.
- La composée de deux fonctions décroissantes est une fonction croissante.

Variations de la composée de deux fonctions monotones

1. On cherche à déterminer le tableau de variations de la fonction $h(x) = 2x^2 + 1$ sur l'intervalle $I = [0; 3]$.
 - (a) Déterminer deux fonctions de référence f et g telles que $h = g \circ f$.
 - (b) Déterminer le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle I . En déduire l'intervalle J auquel appartiennent les valeurs $f(x)$ pour x appartenant à I .
 - (c) Déterminer le tableau de variations de la fonction g sur l'intervalle J .
 - (d) Conclure en donnant le tableau de variations de la fonction h sur l'intervalle I .
2. Déterminer le tableau de variations de la fonction h sur l'intervalle I dans chacun des cas suivants :
 - (a) $h(x) = 1 - x^2$ et $I = [-5; -2]$.
 - (b) $h(x) = \frac{1}{x-3}$ et $I = [-3; -2]$.
 - (c) $h(x) = \frac{1}{2x-4}$ et $I = [0; 5]$.

Variations de la composée de deux fonctions dans le cas général

1. On cherche à déterminer le tableau de variations de la fonction $h(x) = 2x^2 - 1$ sur l'intervalle $I = [-3; 4]$.
 - (a) Déterminer deux fonctions de référence f et g telles que $h = g \circ f$.
 - (b) Déterminer le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle I . En déduire deux intervalles I_1 et I_2 tels que $I = I_1 \cup I_2$ sur lesquels la fonction f est monotone.
 - (c) Déterminer le tableau de variations de la fonction h sur l'intervalle I_1 .
 - (d) Déterminer le tableau de variations de la fonction h sur l'intervalle I_2 .
 - (e) Conclure en donnant le tableau de variations de la fonction h sur l'intervalle I .
2. On cherche à déterminer le tableau de variations de la fonction $h(x) = (x - 3)^2$ sur l'intervalle $I = [-5; 5]$.
 - (a) Déterminer deux fonctions de référence f et g telles que $h = g \circ f$.
 - (b) Déterminer le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle I . En déduire l'intervalle J auquel appartiennent les valeurs $f(x)$ pour x appartenant à I .
 - (c) Déterminer le tableau de variations de la fonction g sur l'intervalle J . En déduire deux intervalles I_1 et I_2 tels que $I = I_1 \cup I_2$ sur lesquels la fonction h sera monotone.
 - (d) Déterminer le tableau de variations de la fonction h sur l'intervalle I_1 .
 - (e) Déterminer le tableau de variations de la fonction h sur l'intervalle I_2 .
 - (f) Conclure en donnant le tableau de variations de la fonction h sur l'intervalle I .
3. Déterminer le tableau de variations de la fonction h sur l'intervalle I dans chacun des cas suivants :
 - (a) $h(x) = 3 - 2x^2$ et $I = [-3; 4]$.
 - (b) $h(x) = (2 - x)^2$ et $I = [-5; 5]$.