Composition de fonctions

1 Fonctions de référence

1.1 Fonctions linéaires et affines

Définition 1. *On appelle* fonction affine *une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ vérifiant $f(x) = ax + b$ avec $a, b \in \mathbb{R}$.*
Si $b = 0$, la fonction $f : x \mapsto ax$ est appelée fonction linéaire*.*
Si $a = 0$, la fonction $f : x \mapsto b$ est appelée fonction constante*.*

Propriété 1. *La courbe représentative d'une fonction affine $f : x \mapsto ax + b$ est une droite de* coefficient directeur *a et d'*ordonnée à l'origine *b.*

Exemple 1. *Tracer la courbe représentative de la fonction affine $f(x) = -\dfrac{1}{2}x + 2$ dans un repère orthonormé.*

Propriété 2. *Une fonction affine $f : x \mapsto ax + b$ est croissante si $a > 0$, décroissante si $a < 0$ et constante si $a = 0$.*

Démonstration. au programme. □

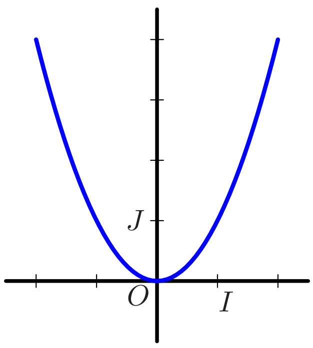
Propriété 3. *Une fonction f est affine si et seulement si l'accroissement de l'image est proportionnel à l'accroissement de la variable :*

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = Constante$$

Exercice 1. *Déterminer la fonction affine f vérifiant $f(1) = 1$ et $f(-2) = 7$.*

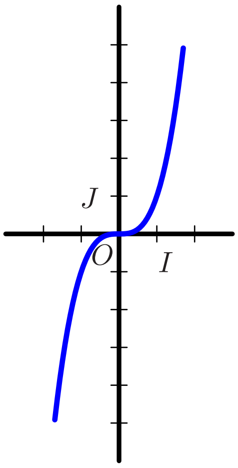
1.2 Les fonctions carré et cube

Définition 2. *La fonction $f(x) = x^2$ définie sur $\mathbb{R}$ est appelée* fonction carré*, sa représentation graphique est une parabole symétrique par rapport à l'axe des ordonnées de sommet l'origine du repère.*



x	$-\infty$		0		$+\infty$
x^2		$\searrow$	0	$\nearrow$	

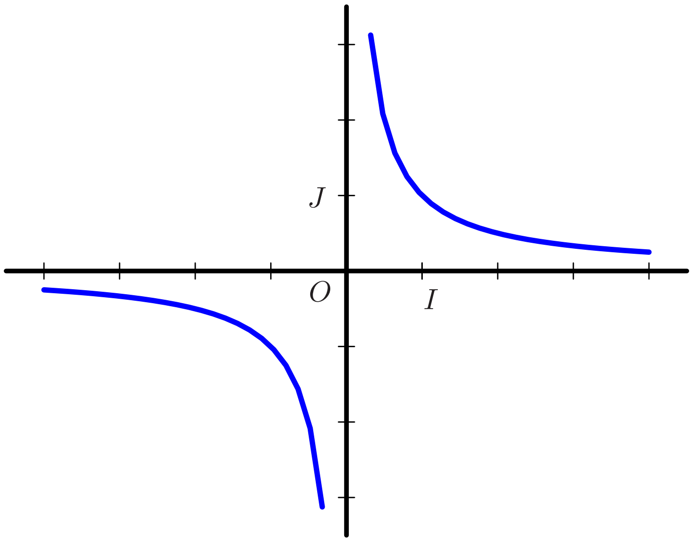
Définition 3. *La fonction* $f(x) = x^3$ *définie sur* $\mathbb{R}$ *est appelée* fonction cube*. Sa représentation graphique est symétrique par rapport à l'origine du repère.*



x	$-\infty$		0		$+\infty$
x^3		$\nearrow$	0	$\nearrow$	

1.3 La fonction inverse

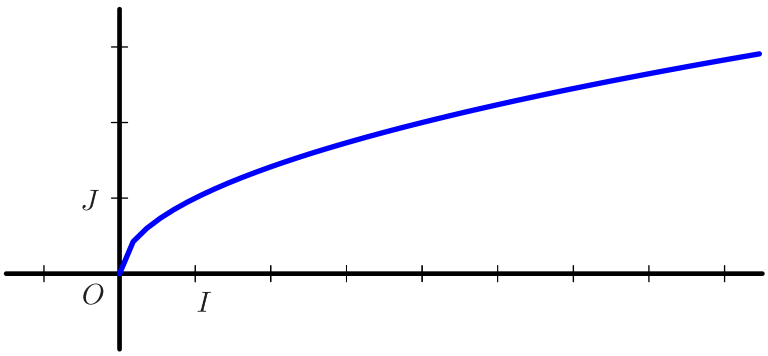
Définition 4. *La fonction* $f(x) = \dfrac{1}{x}$ *définie sur* $\mathbb{R}^*$ *est appelée* fonction inverse*. Sa représentation graphique est une hyperbole symétrique par rapport à l'origine.*



x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\dfrac{1}{x}$		$\searrow$	$\|$	$\searrow$	

1.4 La fonction racine carrée

Définition 5. *La fonction* $f(x) = \sqrt{x}$ *définie sur* $[\ 0\ ;\ +\infty\ [$ *est appelée* fonction racine carrée*.*



x	0		$+\infty$
$\sqrt{x}$	0	$\nearrow$	

2 Composition de fonctions

2.1 Composée de deux fonctions

Définition 6. *On considère deux fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$. On appelle* fonction composée *de f par g et on note $g \circ f$ (g « rond » f) la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par* $\boxed{g \circ f(x) = g[f(x)]}$.

Exemple 2. *Déterminer les fonctions $g \circ f$ et $f \circ g$ pour $f(x) = 2x - 3$ et $g(x) = x^2$.*

Exercice 2. *Décomposer la fonction $h(x) = \dfrac{2}{x} - 3$ sous la forme $g \circ f$ avec f et g des fonctions de référence.*

Exercice 3. *Déterminer un encadrement de la fonction $h(x) = 2x^2 - 1$ sur l'intervalle $[-2; 3]$.*

Exercice 4. *Décomposer la fonction $k(x) = 2x^2 - 4x - 1$ sous la forme $h \circ g \circ f$ avec f et h des fonctions affines et g la fonction carré.*

2.2 Composition de fonctions et variations

Propriété 4.
- *La composée de deux fonctions croissantes est une fonction croissante.*
- *La composée de deux fonctions décroissantes est une fonction croissante.*
- *La composée d'une fonction croissante et d'une fonction décroissante est une fonction décroissante.*

Démonstration. au programme. □

Remarque 1. *Cette règle est analogue à la règle des signes pour la multiplication.*

Exercice 5. *Déterminer les variations de la fonction $h(x) = \dfrac{2}{x} - 3$ sur l'intervalle $]0; +\infty]$.*

Exercice 6. *Déterminer les variations de la fonction $h(x) = 2x^2 - 1$ sur l'intervalle $[-2; 3]$.*