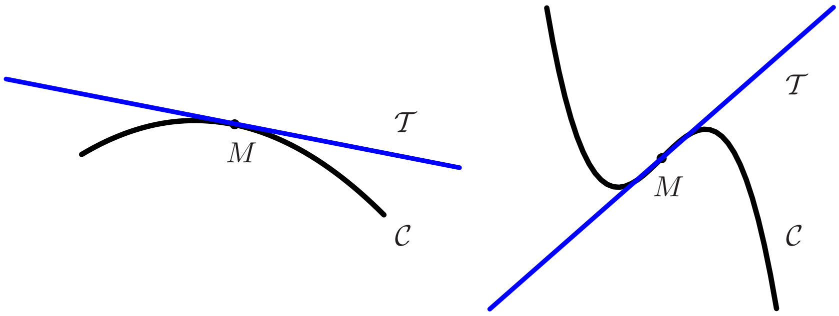
Dérivation

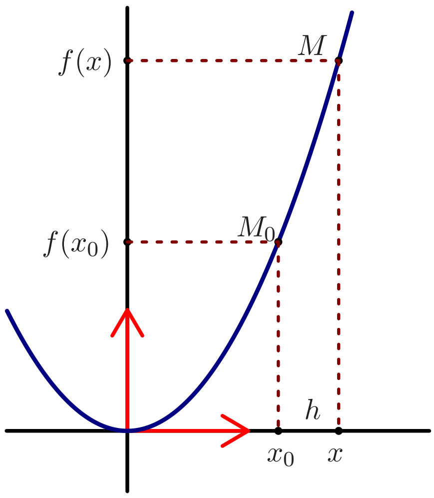
1 Tangente et nombre dérivé

Définition 1. *On appelle* tangente $\mathcal{T}$ *à la courbe* $\mathcal{C}$ *au point* M *si elle existe, la droite qui approche le mieux la courbe* $\mathcal{C}$ *au voisinage du point* M.



Définition 2. *Soit* f *une fonction et* $\mathcal{C}$ *sa courbe représentative dans un repère orthonormal. Si la courbe* $\mathcal{C}$ *admet une tangente au point de coordonnées* $(x_0; f(x_0))$ *non parallèle à l'axe des ordonnées alors la fonction* f *est dite dérivable en* x_0 *et on appelle* nombre dérivé $f'(x_0)$*de la fonction* f *en* x_0 *le coefficient directeur de cette tangente.*

Propriété 1. *Le nombre dérivé d'une fonction* f *en* x_0 *si il existe est la valeur limite du* taux d'acroissement $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ *quand* h *se rapproche de* 0.



Exercice 1.

1. *Calculer le nombre dérivé de la fonction carré en* $x_0 = 1$.
2. *Calculer le nombre dérivé de la fonction carré en* x_0 *quelconque.*
3. *Calculer le nombre dérivé de la fonction inverse en* $x_0 = 1$.
4. *Calculer le nombre dérivé de la fonction inverse en* x_0 *quelconque.*

Propriété 2. *Si une fonction* f *est dérivable en* x_0 *alors sa courbe représentative dans un repère orthonormal admet une tangente au point de coordonnées* $(x_0; f(x_0))$ *d'équation :* $\boxed{y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)}$.

Démonstration. au programme □

2 Fonction dérivée

Définition 3. *On appelle* fonction dérivée *d'une fonction f la fonction f' qui à x associe le nombre dérivé de la fonction f en x.*

2.1 Dérivées des fonctions de référence

Propriété 3.

fonction		*intervalle(s) de dérivabilité*	*fonction dérivée*
fonction constante	$f(x) = C$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 0$
fonction affine	$f(x) = ax + b$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = a$
fonction carré	$f(x) = x^2$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 2x$
fonction cube	$f(x) = x^3$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 3x^2$
fonction inverse	$f(x) = \dfrac{1}{x}$	$\mathbb{R}_-^*$ *et* $\mathbb{R}_+^*$	$f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$
fonction puissance	$f(x) = x^n \quad n \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}$ *si* $n > 0$; $\mathbb{R}_-^*$ *et* $\mathbb{R}_+^*$ *si* $n < 0$	$f'(x) = nx^{n-1}$
fonction racine carrée	$f(x) = \sqrt{x}$	$\mathbb{R}_+^*$	$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

Démonstration. admis. □

2.2 Dérivée et opérations sur les fonctions

Propriété 4. *Si u est une fonction dérivable et k un nombre réel alors la fonction $k \times u$ est dérivable et :*

$$\boxed{(k \times u)' = k \times u'}$$

Démonstration. admis. □

Propriété 5. *Si u et v sont deux fonctions dérivables alors la fonction $u + v$ est dérivable et :*

$$\boxed{(u + v)' = u' + v'}$$

Démonstration. admis. □

Exercice 2. *Calculer la dérivée de la fonction $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$.*

Propriété 6. *Si u et v sont deux fonctions dérivables alors la fonction $u \times v$ est dérivable et :*

$$\boxed{(u \times v)' = u' \times v + u \times v'}$$

Démonstration. admis. □

Exercice 3. *Calculer la dérivée de la fonction $f(x) = x\sqrt{x}$.*

Corollaire 1. *Si u est une fonction dérivable alors la fonction u^2 est dérivable et :*

$$\boxed{(u^2)' = 2 \times u \times u'}$$

Démonstration. au programme. □

Propriété 7. *Si u est une fonction dérivable ne s'annulant pas alors la fonction $\dfrac{1}{u}$ est dérivable et :*

$$\boxed{\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}}$$

Démonstration. admis. □

Exercice 4. *Calculer la dérivée de la fonction* $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$.

Propriété 8. *Si* u *et* v *sont deux fonctions dérivables avec* v *ne s'annulant pas alors la fonction* $\dfrac{u}{v}$ *est dérivable et :*

$$\boxed{\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \times v - u \times v'}{v^2}}$$

Démonstration. admis. □

Exercice 5. *Calculer la dérivée de la fonction* $f(x) = \dfrac{2x-3}{x^2+1}$.

Propriété 9. *Si* u *est une fonction dérivable et* a *et* b *des nombres réels alors la fonction* v *définie par* $v(x) = u(ax+b)$ *est dérivable et* $v'(x) = a \times u'(ax+b)$.

Démonstration. admis. □

Exercice 6. *Calculer la dérivée de la fonction* $f(x) = \sqrt{3x+1}$.

3 Dérivée et variations d'une fonction

Théorème 1. *On considère une fonction* f *définie et dérivable sur un intervalle* I *alors :*

- *Si* $f'(x) = 0$ *pour tout* $x \in I$ *alors* f *est constante sur* I.
- *Si* $f'(x) > 0$ *pour tout* $x \in I$ *alors* f *est strictement croissante sur* I.
- *Si* $f'(x) < 0$ *pour tout* $x \in I$ *alors* f *est strictement décroissante sur* I.

Démonstration. admis. □

Exercice 7. *On considère la fonction* $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 10$. *Étudier les variations de la fonction* f.

Exercice 8. *Déterminer le nombre de solutions de l'équation* $x^3 - 3x - 1 = 0$ *et en donner une valeur approchée au dixième.*