

## Nombres complexes

**Théorème 1.** *Il existe un ensemble  $\mathbb{C}$  des nombres complexes qui possède les propriétés suivantes :*

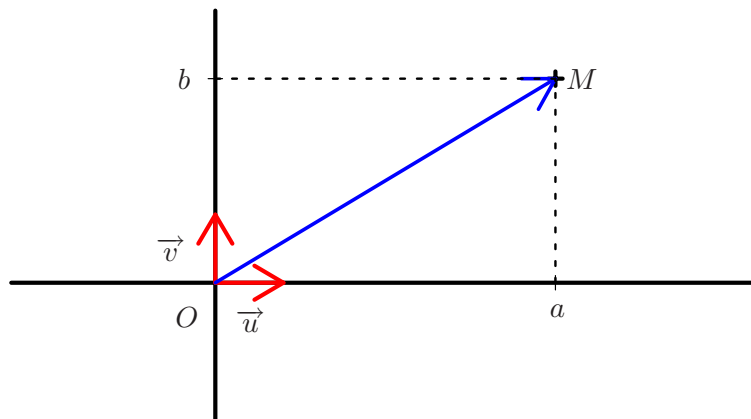
- $\mathbb{C}$  contient  $\mathbb{R}$ .
- $\mathbb{C}$  est muni d'une addition et d'une multiplication qui suivent les mêmes règles de calcul que dans  $\mathbb{R}$ .
- $\mathbb{C}$  contient un nombre noté  $i$  tel que  $i^2 = -1$ .
- tout nombre complexe  $z$  admet une unique écriture sous la forme  $z = a + bi$  avec  $a, b \in \mathbb{R}$ , cette écriture est appelée forme algébrique du nombre  $z$ , le réel  $a$  est la partie réelle du nombre  $z$  notée  $\operatorname{Re}(z)$  et réel  $b$  est la partie imaginaire du nombre  $z$  notée  $\operatorname{Im}(z)$ . Si  $b = 0$  le nombre  $z$  est dit réel et si  $a = 0$  le nombre  $z$  est dit imaginaire pur.

**Exercice 1.** *Calculer la forme algébrique du nombre complexe  $z = 3 - (2 + i)(1 - 3i)$ .*

**Définition 1.** *Dans le plan muni d'un repère orthonormal direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$  on représente le nombre complexe  $z = a + bi$  par :*

- Le point  $M(a; b)$ .
- Le vecteur  $\overrightarrow{OM} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

*Le plan est alors appelé plan complexe, l'axe des abscisses est appelé axe des réels et l'axe des ordonnées axe des imaginaires purs, le nombre complexe  $z$  est appelé affixe du point  $M$  et du vecteur  $\overrightarrow{OM}$ .*



**Exercice 2.** *Représenter dans le plan complexe les points  $A, B, C$  et  $D$  d'affixes respectives  $z_A = 1 + 2i$ ,  $z_B = -1 - 4i$ ,  $z_C = -3i$  et  $z_D = -7$ . Déterminer l'affixe du vecteur  $\overrightarrow{AB}$ .*

**Définition 2.** *Soit  $z = a + bi$  un nombre complexe, on appelle nombre complexe conjugué de  $z$  le nombre complexe  $\bar{z} = a - bi$ .*

**Exercice 3.** *Soit  $z$  un nombre complexe, que peut-on dire des points  $M$  et  $M'$  du plan complexe d'affixes respectives  $z$  et  $\bar{z}$ .*

**Exercice 4.** *Calculer la forme algébrique du nombre complexe  $z = \frac{3 - i}{1 + 2i}$ . (on pourra multiplier numérateur et dénominateur par le conjugué du dénominateur)*

**Propriété 1.** Soient  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$  on a :

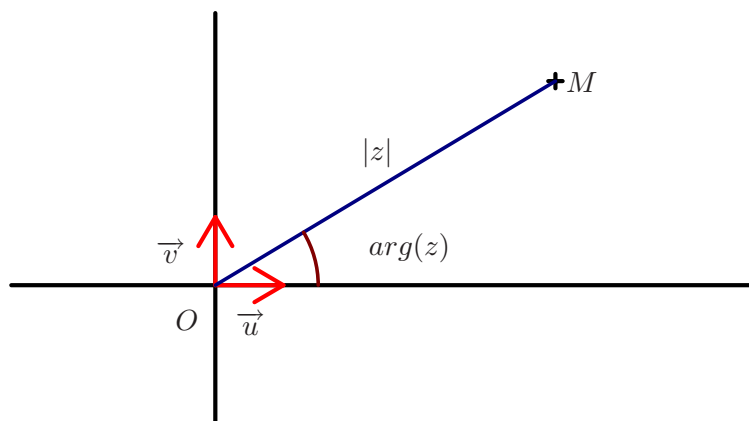
$$1. \overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$$

$$2. \overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}$$

$$3. \overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \overline{z_2}$$

$$4. \text{ pour } z_2 \neq 0, \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$$

**Définition 3.** Soit  $M$  un point du plan complexe différent de  $O$  d'affixe  $z = a + bi$ . On appelle module du nombre complexe  $z$  et on note  $|z|$  le nombre réel égal à la distance  $OM$ , on appelle argument du nombre complexe  $z$  et on note  $\arg(z)$  une mesure en radians de l'angle  $(\vec{u}, \overrightarrow{OM})$ . Le couple  $(|z|, \arg(z))$  correspondant aux coordonnées polaires du point  $M$  est appelé forme trigonométrique du nombre complexe  $z$ .



**Remarque 1.** Le nombre 0 possède un module nul mais on ne peut pas lui définir d'argument.

**Propriété 2.** Soit  $z = a + bi$  un nombre complexe non nul, alors :

$$1. |z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

$$2. \arg(z) = \theta \text{ avec } \cos \theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \text{ et } \sin \theta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

**Exercice 5.** Calculer la forme trigonométrique des nombres complexes  $z_1 = -5$ ,  $z_2 = 2+2i$  et  $z_3 = -1+i\sqrt{3}$ .

**Propriété 3.** Soit  $z = a + bi$  un nombre complexe non nul avec  $\rho = |z|$  et  $\theta = \arg(z)$ , alors :

$$z = \rho(\cos \theta + i \sin \theta)$$

**Exercice 6.** Déterminer la forme algébrique du nombre complexe  $z$  de module 3 et d'argument  $-\frac{\pi}{6}$ .