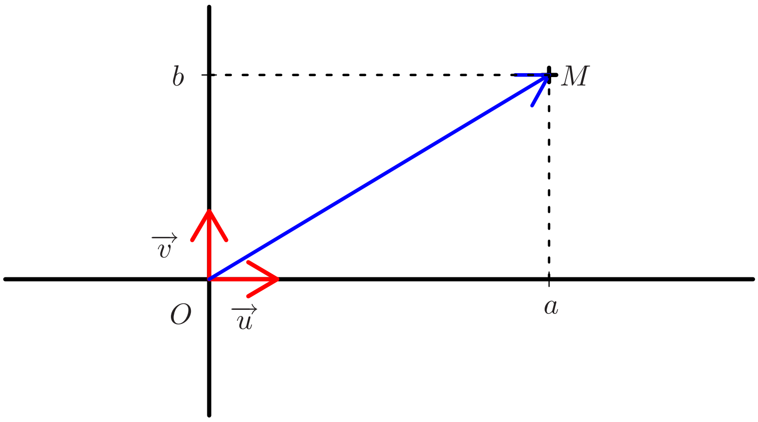
Nombres complexes

Théorème 1. *Il existe un ensemble* $\mathbb{C}$ *des* nombres complexes *qui possède les propriétés suivantes :*
- $\mathbb{C}$ *contient* $\mathbb{R}$*.*
- $\mathbb{C}$ *est muni d'une addition et d'une multiplication qui suivent les mêmes règles de calcul que dans* $\mathbb{R}$*.*
- $\mathbb{C}$ *contient un nombre noté* i *tel que* $i^2 = -1$*.*
- *tout nombre complexe* z *admet une unique écriture sous la forme* $z = a+bi$ *avec* $a, b \in \mathbb{R}$*, cette écriture est appelée* forme algébrique *du nombre* z*, le réel* a *est la* partie réelle *du nombre* z *notée* $\mathcal{R}e(z)$ *et réel* b *est la* partie imaginaire *du nombre* z *notée* $\mathcal{I}m(z)$*. Si* $b = 0$ *le nombre* z *est dit* réel *et si* $a = 0$ *le nombre* z *est dit* imaginaire pur.

Exercice 1. *Calculer la forme algébrique du nombre complexe* $z = 3 - (2+i)(1-3i)$*.*

Définition 1. *Dans le plan muni d'un repère orthonormal direct* $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ *on représente le nombre complexe* $z = a + bi$ *par :*
- *Le point* $M(a; b)$*.*
- *Le vecteur* $\overrightarrow{OM}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

Le plan est alors appelé plan complexe*, l'axe des abscisses est appelé* axe des réels *et l'axe des ordonnées* axe des imaginaires purs*, le nombre complexe* z *est appelé* affixe *du point* M *et du vecteur* $\overrightarrow{OM}$*.*



Exercice 2. *Représenter dans le plan complexe les points* A*,* B*,* C *et* D *d'affixes respectives* $z_A = 1 + 2i$*,* $z_B = -1 - 4i$*,* $z_C = -3i$ *et* $z_D = -7$*. Déterminer l'affixe du vecteur* $\overrightarrow{AB}$*.*

Définition 2. *Soit* $z = a + bi$ *un nombre complexe, on appelle* nombre complexe conjugué *de* z *le nombre complexe* $\overline{z} = a - bi$*.*

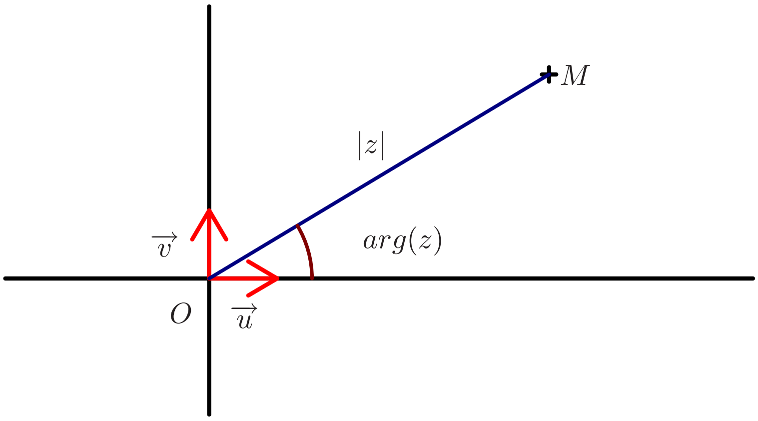
Exercice 3. *Soit* z *un nombre complexe, que peut-on dire des points* M *et* M' *du plan complexe d'affixes respectives* z *et* $\overline{z}$*.*

Exercice 4. *Calculer la forme algébrique du nombre complexe* $z = \dfrac{3-i}{1+2i}$ *. (on pourra multiplier numérateur et dénominateur par le conjugué du dénominateur)*

Propriété 1. *Soient $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ on a :*

1. $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$
2. $\overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}$
3. $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\ \overline{z_2}$
4. *pour* $z_2 \neq 0$, $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$

Définition 3. *Soit M un point du plan complexe différent de O d'affixe $z = a + bi$. On appelle* module *du nombre complexe z et on note $|z|$ le nombre réel égal à la distance OM, on appelle* argument *du nombre complexe z et on note $arg(z)$ une mesure en radians de l'angle $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM})$. Le couple $(|z|, \arg(z))$ correspondant aux coordonnées polaires du point M est appelé* forme trigonométrique *du nombre complexe z.*



Remarque 1. *Le nombre 0 possède un module nul mais on ne peut pas lui définir d'argument.*

Propriété 2. *Soit $z = a + bi$ un nombre complexe non nul, alors :*

1. $\boxed{|z| = \sqrt{a^2 + b^2}}$.
2. $\arg(z) = \theta$ *avec* $\boxed{\cos\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}}$ *et* $\boxed{\sin\theta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}}$.

Exercice 5. *Calculer la forme trigonométrique des nombres complexes $z_1 = -5$, $z_2 = 2+2i$ et $z_3 = -1+i\sqrt{3}$.*

Propriété 3. *Soit $z = a + bi$ un nombre complexe non nul avec $\rho = |z|$ et $\theta = \arg(z)$, alors :*

$$\boxed{z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)}$$

Exercice 6. *Déterminer la forme algébrique du nombre complexe z de module 3 et d'argument $-\frac{\pi}{6}$.*