# Suites numériques

## 1 Définitions

**Définition 1.** *On appelle suite numérique* $(u_n)$ *une fonction de* $\mathbb{N}$ *dans* $\mathbb{R}$ *:*

$$\begin{array}{rccc} u: & \mathbb{N} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & n & \mapsto & u(n) = u_n \end{array}$$

$u_n$ *est appelé* terme *de* rang $n$ *de la suite.*

**Exemple 1.**
- *La suite définie par* $u_n = 2^n$, $n \geqslant 0$ *est une suite donnée sous* ***forme explicite****.*
- *La suite définie par* $v_0 = 1$ *et* $v_{n+1} = 2 \times v_n$, $n \geqslant 0$ *est une suite donnée sous* ***forme récurrente****.*

**Exercice 1.** *Calculer les termes des deux suites précédentes pour les rangs compris entre* 0 *et* 8*. Quelle conjecture peut-on formuler ?*

## 2 Suites arithmétiques

**Définition 2.** *On appelle* suite arithmétique *de* raison $r$ *et de premier terme* $u_0$*, la suite définie par la relation de récurrence* $\boxed{u_{n+1} = u_n + r}$.

**Exemple 2.**
- *La suite des nombres entiers est arithmétique de raison* 1 *et de premier terme* $u_0 = 0$.
- *La suite des nombres pairs est arithmétique de raison* 2 *et de premier terme* $u_0 = 0$.
- *La suite des nombres impairs est arithmétique de raison* 2 *et de premier terme* $u_0 = 1$.

**Exercice 2.** *Déterminer la forme explicite des trois suites précédentes.*

**Propriété 1.** *Si* $(u_n)$ *est une suite arithmétique de raison* $r$ *et de premier terme* $u_0$ *alors elle admet pour forme explicite* $\boxed{u_n = u_0 + n \times r}$.

**Problème 1.** *Prouver que* $\boxed{1 + 2 + 3 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}}$.

## 3 Suites géométriques

**Définition 3.** *On appelle* suite géométrique *de* raison $r$ *et de premier terme* $u_0$*, la suite définie par la relation de récurrence* $\boxed{u_{n+1} = u_n \times r}$.

**Exemple 3.** *La suite des puissances de* 3 *est géométrique de raison* 3 *et de premier terme* $u_0 = 1$.

**Exercice 3.** *Déterminer la forme explicite de la suite précédente.*

**Propriété 2.** *Si* $(u_n)$ *est une suite géométrique de raison* $r$ *et de premier terme* $u_0$ *alors elle admet pour forme explicite* $\boxed{u_n = u_0 \times r^n}$.

**Problème 2.** *Prouver que* $\boxed{1 + r + r^2 + r^3 + \cdots + r^n = \dfrac{1 - r^{n+1}}{1 - r}}$ *pour* $r \neq 1$.