Probabilités

1 Vocabulaire

Définition 1. *Une* expérience aléatoire *est une expérience dont le résultat est lié au hasard. Chaque résultat possible est appelé une* éventualité, *l'ensemble des éventualités est appelé* univers *et noté* Ω*.*

Exercice 1. *On considère le lancer d'un dé à six faces. Déterminer l'univers de cette expérience aléatoire.*

Définition 2. *On appelle* événement *un ensemble d'éventualités, c'est à dire une partie de l'univers. On distingue :*
- *événement* élémentaire *: il ne contient qu'une seule éventualité.*
- *événement* impossible *: il ne contient aucune éventualité.*
- *événement* certain *: il contient toutes les éventualités.*

Exercice 2. *On considère le lancer d'un dé à six faces et on définit les événements suivants :*
- *A : « le 5 sort ».*
- *B : « un multiple de 2 sort ».*
- *C : « un multiple de 7 sort ».*
- *D : « un nombre inférieur à 7 sort ».*

Écrire sous forme d'ensemble les événements précédents puis déterminer parmi ceux-ci les événements élémentaires, impossibles ou certains.

Définition 3.
- *On note $E_1 \cap E_2$ l'*intersection *de deux événements, c'est l'ensemble des éventualités appartenant à E_1* et *à E_2.*
- *On note $E_1 \cup E_2$ l'*union *de deux événements, c'est l'ensemble des éventualités appartenant à E_1* ou *à E_2.*
- *On note $\overline{E}$ le* contraire *de l'événement E, c'est l'ensemble des éventualités qui n'appartiennent pas à E.*
- *Deux événements E_1 et E_2 sont dits* incompatibles *si $E_1 \cap E_2 = \emptyset$, c'est à dire qu'ils ne peuvent se réaliser en même temps.*

Exercice 3. *On considère les événements A, B, C et D de l'exercice précédent. Écrire sous forme d'ensemble les événements $A \cup B$, $A \cap D$, $\overline{B}$. Montrer que les événements A et B sont incompatibles.*

Remarque 1.

$$\boxed{\overline{\Omega} = \emptyset}$$

$$\boxed{\overline{\emptyset} = \Omega}$$

$$\boxed{\overline{\overline{E}} = E}$$

$$\boxed{E \text{ et } \overline{E} \text{ sont incompatibles}}$$

2 Notion de Probabilité

Définition 4. *On considère un univers fini* $\Omega = \{e_1, e_2, \dots e_n\}$*. Une* loi de probabilité *sur* Ω *est l'association à chaque éventualité* e_i *de* Ω *d'un nombre réel* p_i *appelé* probabilité *tels que :* $\boxed{0 \leqslant p_i \leqslant 1}$ *et* $\boxed{p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1}$.

Exercice 4. *On considère le lancer d'un dé équilibré. Déterminer la loi de probabilité.*

Définition 5. *Une loi de probabilité* $P = \{p_1, p_2, \dots p_n\}$ *sur un univers fini* $\Omega = \{e_1, e_2, \dots e_n\}$ *est dite* équirépartie *si on a* $p_1 = p_2 = \cdots = p_n = \dfrac{1}{n}$.

Exercice 5. *On considère le lancer d'un dé truqué pour lequel le un le quatre et le cinq sortent deux fois plus souvent que le deux et le trois et trois fois moins souvent que le six. Déterminer la loi de probabilité.*

Définition 6. *Étant donné un univers fini* Ω *muni d'une loi de probabilité* P*, on appelle probabilité d'un événement* E *et on note* $P(E)$ *la somme des probabilités* p_i *associées aux éventualités formant l'événement* E.

Remarque 2.

$$\boxed{P(\emptyset) = 0}$$

$$\boxed{P(\Omega) = 1}$$

$$\boxed{0 \leqslant P(E) \leqslant 1}$$

Exercice 6. *Calculer la probabilité d'obtenir un nombre pair dans le cas du dé truqué de l'exercice précédent.*

Propriété 1. *On considère un univers* Ω *contenant* n *éventualités muni d'une loi de probabilité* ***équirépartie*** P*, alors si* E *est un événement contenant* p *éventualités on a :*

$$P(E) = \frac{p}{n} = \frac{\textit{nombre de cas favorables}}{\textit{nombre de cas possibles}}$$

Exemple 1. *Calculer la probabilité d'obtenir un nombre pair dans le cas du dé équilibré.*

Propriété 2. *On considère une loi de probabilité* P *sur un univers fini* Ω *et deux événements* E_1 *et* E_2*, alors :*

$$\boxed{P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2)}$$

Corollaire 1. *On considère une loi de probabilité* P *sur un univers fini* Ω *et deux événements* E_1 *et* E_2 *incompatibles, alors* $P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2)$.

Corollaire 2. *On considère une loi de probabilité* P *sur un univers fini* Ω *et un événement* E*, alors :*

$$\boxed{P(\overline{E}) = 1 - P(E)}$$