

Probabilités

1 Vocabulaire

Définition 1. Une expérience aléatoire est une expérience dont le résultat est lié au hasard. Chaque résultat possible est appelé une éventualité, l'ensemble des éventualités est appelé univers et noté Ω .

Exercice 1. On considère le lancer d'un dé à six faces. Déterminer l'univers de cette expérience aléatoire.

Définition 2. On appelle événement un ensemble d'éventualités, c'est à dire une partie de l'univers. On distingue :

- événement élémentaire : il ne contient qu'une seule éventualité.
- événement impossible : il ne contient aucune éventualité.
- événement certain : il contient toutes les éventualités.

Exercice 2. On considère le lancer d'un dé à six faces et on définit les événements suivants :

- A : « le 5 sort ».
- B : « un multiple de 2 sort ».
- C : « un multiple de 7 sort ».
- D : « un nombre inférieur à 7 sort ».

Écrire sous forme d'ensemble les événements précédents puis déterminer parmi ceux-ci les événements élémentaires, impossibles ou certains.

Définition 3.

- On note $E_1 \cap E_2$ l'intersection de deux événements, c'est l'ensemble des éventualités appartenant à E_1 et à E_2 .
- On note $E_1 \cup E_2$ l'union de deux événements, c'est l'ensemble des éventualités appartenant à E_1 ou à E_2 .
- On note \bar{E} le contraire de l'événement E , c'est l'ensemble des éventualités qui n'appartiennent pas à E .
- Deux événements E_1 et E_2 sont dits incompatibles si $E_1 \cap E_2 = \emptyset$, c'est à dire qu'ils ne peuvent se réaliser en même temps.

Exercice 3. On considère les événements A , B , C et D de l'exercice précédent. Écrire sous forme d'ensemble les événements $A \cup B$, $A \cap D$, \bar{B} . Montrer que les événements A et B sont incompatibles.

Remarque 1.

$$\overline{\Omega} = \emptyset$$

$$\overline{\emptyset} = \Omega$$

$$\overline{\overline{E}} = E$$

$$E \text{ et } \bar{E} \text{ sont incompatibles}$$

2 Notion de Probabilité

Définition 4. On considère un univers fini $\Omega = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$. Une loi de probabilité sur Ω est l'association à chaque éventualité e_i de Ω d'un nombre réel p_i appelé probabilité tels que :

$$\boxed{0 \leq p_i \leq 1} \text{ et } \boxed{p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1}.$$

Exercice 4. On considère le lancer d'un dé équilibré. Déterminer la loi de probabilité.

Définition 5. Une loi de probabilité $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ sur un univers fini $\Omega = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ est dite équirépartie si on a $p_1 = p_2 = \dots = p_n = \frac{1}{n}$.

Exercice 5. On considère le lancer d'un dé truqué pour lequel le un le quatre et le cinq sortent deux fois plus souvent que le deux et le trois et trois fois moins souvent que le six. Déterminer la loi de probabilité.

Définition 6. Étant donné un univers fini Ω muni d'une loi de probabilité P , on appelle probabilité d'un événement E et on note $P(E)$ la somme des probabilités p_i associées aux éventualités formant l'événement E .

Remarque 2.

$$\boxed{P(\emptyset) = 0}$$

$$\boxed{P(\Omega) = 1}$$

$$\boxed{0 \leq P(E) \leq 1}$$

Exercice 6. Calculer la probabilité d'obtenir un nombre pair dans le cas du dé truqué de l'exercice précédent.

Propriété 1. On considère un univers Ω contenant n éventualités muni d'une loi de probabilité équirépartie P , alors si E est un événement contenant p éventualités on a :

$$P(E) = \frac{p}{n} = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}$$

Exemple 1. Calculer la probabilité d'obtenir un nombre pair dans le cas du dé équilibré.

Propriété 2. On considère une loi de probabilité P sur un univers fini Ω et deux événements E_1 et E_2 , alors :

$$\boxed{P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2)}$$

Corollaire 1. On considère une loi de probabilité P sur un univers fini Ω et deux événements E_1 et E_2 incompatibles, alors $P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2)$.

Corollaire 2. On considère une loi de probabilité P sur un univers fini Ω et un événement E , alors :

$$\boxed{P(\bar{E}) = 1 - P(E)}$$